第2卷 第3期　　天 文 学 进 展　　Vol. 2, No. 3
1984年7—9月　　PROGRESS IN ASTRONOMY　　July—Sept., 1984

恒星统计视差研究方法的新进展

赵君亮
(中国科学院上海天文台)

提　　要

本文对按经典方法确定恒星统计视差这一重要恒星天文学问题作了简单的回顾，并指出这种方法在统计学上是不严格的。太阳运动和速度椭球的确定严格来说是不可分离的，长期视差和统计视差不能看作为彼此独立的量。在上述讨论的基础上，对于按最大似然原理解算包括统计视差在内的运动学参数问题的提出和发展过程作了介绍，重点介绍了Clube等和Murray在七十年代和八十年代所提出的方法。Murray所用的数学模型认为星群内各个恒星的残差$\vec{v}$服从三维正态分布，因而自然引入本动协方差阵。就目前来说，它可算是最为严格的方法，其中共需通过迭代算法解算11个未知数。最后，对这两种方法作了简单的比较。

统计视差的确定是恒星天文学的重要内容之一，在有关宇宙距离尺度问题的研究中它有着不可忽视的地位。比如，按统计视差法求得的天琴座RR型变星的绝对星等，可用来确定球状星团以至较近河外星系的距离，从而被誉为“量天尺”。因此，关于统计视差确定方法的研究长期来受到人们的重视，并一直处于不断改进之中。本文试图对这一工作的主要方面作一综合性的评述，并着重介绍最近一些年代提出的新方法。

一、经典的统计视差法

经典方法确定统计视差的基本出发点是，从统计上来说，恒星自行越大，视差也越大。因此，对于具有某种共同特性的一批恒星来说，如果星数比较多，那么就可以根据它们自行的某种平均值，来估计这批恒星的平均周年视差。

1938年Smart系统地叙述了利用观测资料求平均视差$\bar{\pi}$的问题[1]。实际上这里需要用到的观测量不仅有自行(μ_α, μ_δ)，而且还有视向速度(V_r)。可以利用视向速度资料确定太阳运动的线速度V_0，由自行确定向点位置(A_0, D_0)，然后由自行求得平均视差。也可以同时利用视向速度和自行一次求出(V_0, A_0, D_0)，再由自行计算$\bar{\pi}$。为此，首先需确定背点对恒星的位置角χ及恒星到向点的角距离λ，并求得自行在背点方向的分量v及垂直背点方向的分量τ。于是便可以利用v分量、τ分量，以及v分量中的本动部分v'来计算平均视差。

计算平均视差的经典方法是采用两步解算的做法，即先求得平均太阳运动(即长期视差)的分量(u_0, v_0, w_0)或(V_0, A_0, D_0)，然后再计算平均视差$\bar{\pi}$。上海天文台以前的有关工作

1984年7月5日收到。

本质上也是按这种两步解算的方法进行的[2]。

经典方法确定速度椭球同样也采取两步解的方法，即先计算长期视差，然后再确定速度椭球主轴[3]。

下面我们将要指出，这种两步解的方法，从统计学上讲是不严格的。

二、运动学参数

运动学参数广义地应包括以下的内容：

1．平均太阳运动，即长期视差；或者是恒星群相对太阳的运动，两者大小相等、方向相反。平均太阳运动共有三个分量(u_0, v_0, w_0)，或代之以太阳运动速度V_0及向点坐标(A_0, D_0)。

2．椭球速度分布参数，即残余速度的协方差阵。这是一个3×3的对称阵，共有6个未知参数。由于椭球主轴一般并不与坐标轴相重合，故非主对角线项不为零。

3．银河系较差自转参数ω、ω'；ω为角速度，ω'为角速度变率。该两参数可用奥尔特常数A、B代之。

4．银河系径向运动参数ε、ε'；ε为径向速度，ε'为ε之变率。

5．星群的平均绝对星等$\overline{M}$。

6．各颗恒星绝对星等M_i对于$\overline{M}$的标准偏差σ_M。

以上5.、6.两类参数表面上似乎与运动学问题无关，实际上由于下面要谈到的原因，与其他参数的解算是不可分割的，因而这里也归入运动学参数之列。

上述各参数通常并不是可以就某一星群的观测资料一并求解的，往往也没有这种必要。实际上对于不同的待分析星群应作不同的考虑。比如，在分析某一光谱型恒星群的运动状况时，$\overline{M}$和σ_M是不可能求解的。这是因为星群内恒星的实际绝对星等变化较大，不宜用平均绝对星等及其弥散度来代表各个M_i。这时，往往只能求解参数1.；在资料较多、精度较高时，还可以求解参数3.以至4.。当然，参数2.在需要时是可以求解的。

对于天琴座RR型变星或造父变星一类星群，参数$\overline{M}$和σ_M正是所要求的主要内容。但是在星数较少时参数3.和4.是求解不出的，尤其是ε和ε'量值很小，对其他参数的求解不会有什么影响。相反，如果一并加以考虑的话问题将会变得十分复杂，尤其在作最大似然估算时更是如此。所以这时通常要求的最多为11个未知数，即上列的参数1.、2.、5.、6.。本文所要讨论的也正是这种情况。

三、发展概况

经典统计视差法的两步解算程序从理论上讲是不严格的。这主要表现在两个方面。第一，平均视差$\bar{\pi}$的确定，表面上只是用到自行，但实际上在求解平均太阳运动分量时已用到视向速度及自行。最后计算$\bar{\pi}$时用的实际上不是独立的自行观测分量(μ_α, μ_δ)，而是导出分量(v, τ)，它们在诸星之间是不独立的，而且又用到了距离(视差)。另外，利用自行这两个分量求解时，不仅本动速度分量与方向有关，而且这两个分量之间也相互有关。第二，先确定长期

视差，然后再确定速度椭球主轴，这种做法是不合理的。因为现在问题中的残差不再是简单的观测误差，而是既包括观测误差，又有本动速度分布在内，是两者的联合。经典统计视差法把它作为单一随机变量处理，在定出平均太阳运动之后再由后验残差计算均方差。由于本动速度具有椭球分布，这样做是不严格的。

实际上太阳运动和速度椭球的确定不是严格可分离的，长期视差和统计视差也不能看为独立的量。统计视差的确定必然同星群的其他运动学参数问题联系在一起。所以必须用一种严格的方法来合理地解决这一问题，最大似然原理的应用就是在这一背景下提出来的。

在任何实际问题中都不应假定速度椭球参数是事先已知的。从这一点出发，Rigel于1958年按最大似然原理推导了一组方程[4]，以同时解算包括平均视差在内的运动学参数。该方法已为Jung 所应用[5]。但是Rigel所导出的方程是有问题的，在作为似然函数基本组成部分的每一观测的后验概率表达式中，用的不是原始观测量，而是用了导出量，即先把自行化为横向速度，这里就要用到距离。事实上横向速度的分布不可能是对称的正态分布。1971年Clube和Jones[6]给出了以这一原理为基础的类似的表达式，对上述问题作了改进，在似然方程中全部应用直接观测量而不用导出量。待求的未知数共有 8 个，即太阳运动分量（3 个）、速度椭球主轴（3 个）、以及与平均绝对星等及其弥散度有关的两个参数。1980年Clube和 Dawe[7]重新给出按最大似然原理确定运动学参数的公式，并引入本动速度协方差阵，而不是早期方法中的三个方差，从而使未知数个数增加到11个。但是，其中关于权的概念实际上是不正确的，推导公式也有含糊和不严格之处，因而从理论上来说是不可取的。关于这一问题我们在这里不作详细讨论。1983年 C. A. Murray[8]推导了另一套按最大似然原理估算运动学参数的公式，其中以残差服从三维分布来代替Clube方法中的三个一维分布，因而自然引入协方差阵，克服了 Clube1980年方法中不正确的权的概念。可以说这是比较严格的方法，但迄今还没有看到用该方法确定运动学参数的具体结果。

四、Clube 1971年方法

作为这一方法基础的数学模型是：对于一群有共同运动学性质的恒星来说，星群相对于太阳存在着某种平均运动，而星群中每一恒星对于这一平均运动的相对运动（残差）分量服从正态分布。

如果对每颗恒星(i)的每一运动分量(s)分别构成残差

$$\Delta v_{is}=v_{is}-V_{is}$$

这里$v_{is}=(\mu_\alpha,\ \mu_\delta,\ V_r)_i$为观测运动，$V_{is}$为预期运动，与平均太阳运动$u_j(j=1,\ 2,\ 3)$、星群平均绝对星等$\overline{M}$及其弥散度$\sigma_M$有关。

残差Δv_{is}的方差$\varepsilon^2{}_{is}$由两部分组成，一部分为观测方差，另一部分则与速度椭球的主轴$\sigma^2{}_j(j=1,\ 2,\ 3)$有关。现在可以写出对于每一观测的后验概率为

$$p_{is}=(2\pi\varepsilon^2{}_{is})^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-\frac{1}{2}\Delta v^2{}_{is}}{\varepsilon^2{}_{is}}\right)$$

而对于所有N颗恒星全部观测的似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{N}\prod_{s=1}^{3}p_{is}(x_q) \tag{1}$$

这儿x_q表示未知数，即$(x_q,\ q=1,\ 8)\equiv(u_1,\ u_2,\ u_3,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \overline{M},\ \sigma_M)$。

按最大似然原理$\partial\ln L/\partial x_q=0$，对于$q=1,\cdots,8$可推得8个非线性方程，用以解算8个未知数。方程组的解算通常需用迭代法进行，工作量相当大，其中一个重要的问题是合理选取作为迭代初值的未知数近似值；初值选取得不恰当，迭代可能不收敛，或者会得出一组不正确的结果。目前对于这一点尚未有专门的讨论。通常的做法是可以通过经典统计视差法的解算来取得未知数的近似值，应当说这样做是比较合理的。

Clube在提出上述方法的同时还考虑了两个问题。第一是考虑因自行观测误差的不确定性以及自行资料可能有的系统误差对结果进行改进的问题。具体做法是在可能范围内引入这种不确定性或系统误差，重新解算未知数，并观察由此而引起的$\ln L$的变化。如果有明显的改进，则应考虑有关方面的改正。第二是对未知参数的误差进行了估算[7]，引入所谓“最小方差限”的概念。由于方程组是非线性的，为了估算误差，需要先进行线性化，然后由系数阵的逆阵来估算未知数的误差。不过Clube所用的显然是一种近似，对于它的合理性应该进行必要的讨论。

五、Murray 方 法

Clube是在假定恒星空间运动残差每一分量满足一维正态分布的前提下来推导其公式系的，在式(1)中表现为似然函数是$3N$个后验概率之积，其中只包含有方差项$\sigma^2{}_j$，而不包含完整的残余速度协方差阵。

1983年Murray所提出的基本数学模型是：星群内各个恒星在某一坐标内观测速度矢和预期速度矢之差(残差矢$\vec{\nu}$)服从三维正态分布，数学期望为零。于是关于全部N颗星的似然函数可写成为

$$L=\prod_{N}\left\{(2\pi)^{-3/2}\,|\boldsymbol{M}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\vec{\nu}'\,\boldsymbol{M}^{-1}\vec{\nu}\right)\right\} \tag{2}$$

这里$\boldsymbol{M}=E(\vec{\nu},\ \vec{\nu}')$，为残差矢$\vec{\nu}$的协方差阵，$|\boldsymbol{M}|$是$\boldsymbol{M}$的行列式。

现在的问题中一共包含有11个未知数，其中有平均太阳运动$u_j(j=1,\ 2,\ 3)$，剩余速度(本动)协方差阵$\boldsymbol{D}=E(\vec{\eta}\vec{\eta}')$($\vec{\eta}$为恒星的剩余速度，$\boldsymbol{D}$为$3\times3$对称阵，共6个未知数)，平均绝对星等$\overline{M}$及其弥散度$\sigma_M$。如果以$y_k$代表这11个未知数，则按最大似然原理有

$$\frac{\partial L}{\partial y_k}=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 11) \tag{3}$$

可得11个非线性方程。

Murray也没有对有关迭代解算的初值选取问题进行讨论，而这在具体计算中则是必须加

以解决的。经典统计视差法的解算通常并不能求得协方差阵，而只能求得主对角线上的三个元素(方差)，即 σ_1^2、σ_2^2、σ_3^2。

一般地说，式(2)的列出可以采取赤道坐标系或银道坐标系，其中需要注意残差 $\vec{\nu}$ 在不同坐标系中的不同表达形式，以及随之而来的$\boldsymbol{M}$的不同表达形式。由于直接观测量是在局部赤道坐标系内给出的，所以采用赤道坐标系解题时相应的表达式具有较为简单的形式，而采用银道坐标系解题时先要进行必要的坐标转换。另一方面，恒星的总体运动性质与银河系的运动学情况有关，有关的研究工作也说明了这一点[9]。所以，我们可以认为速度椭球主轴大致上与银道坐标系轴相一致，因而采取

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2^2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3^2\end{pmatrix}$$

作为本动协方差阵的近似式参与迭代解算。如果采用赤道坐标系解题，则可用

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{ADA}'$$

作为协方差阵的近似式，其中$\boldsymbol{A}$为赤道坐标系相对银道坐标系的方向余弦阵。

应当指出的是如果出现 $\sigma_2\approx\sigma_3$，甚至$\sigma_1\approx\sigma_2\approx\sigma_3$，用银道坐标系解题较好，可以避免赤道系解题时坐标转换的不定性问题。

与Clube方法相比，由于 Murray 方法中直接假设残差矢 $\vec{\nu}$ 服从三维正态分布，而不是分别考虑它的三个分量，因而自然引入了完整的本动协方差阵。所以从统计学的角度来看，Murray 的数学模型更为严格。这一方法的解题思路清晰，同时又克服了 Clube 1980 年方法中的一些混乱和不严格之处。可以说，这是迄今为止估算运动学参数(包括统计视差)的最好办法。

另一方面，也正因为本动协方差阵的引入，待求参数的个数从 8 个增加到11个。解题所要用的数学方程的形式相应地也要复杂得多，从而必然会使计算工作量增大。同时，Murray 本人在提出这一方法时没有考虑有关各参数的精度估算问题。从方程(3)的形式上来看[8]，这一问题至少是极其困难的。

*　　*　　*

最大似然原理的应用，是有关运动学参数研究的一个重要进展。它从理论上以及实践上解决了直接利用原始观测资料，同时解算长期视差、统计视差以及速度椭球参数的问题。毫无疑问，这一进展和快速电子计算机的出现是分不开的。二十五年以来，这一新方法本身又在不断改进之中。目前来看，Murray在最近所提出的解算程序是最为严格的。如果我们只考虑本动协方差阵中的主对角线项，那么 Clube 1971 年方法也是可取的。

应该注意的是，这两种方法都没有考虑银河系的较差自转以及不均匀径向运动（一阶速度场)的效应。对于如天琴座 RR型变星，由于大部分为晕族恒星，这些效应相对来说自然是不重要的。而对更一般性的情况来说，也许还有进一步研究的必要。当然，这也必须以取得足够多的高精度观测资料为前提。否则的话，数学模型的进一步复杂化是不会带来明显好处的。

参 考 文 献

[1] Smart, W. M., Stellar Dynamics, Cambridge University Press, (1938).
[2] 万籁等，上海天文台年刊，第三期，(1981).
[3] 戴文赛，恒星天文学，科学出版社，(1965).
[4] Rigel, J. L., *Bulletin Astronomique*, 72 (1958), 171.
[5] Jung, J., *Astro. Astrophys.*, 4 (1970), 53.
[6] Clube, S. V. M. and Jones, D. H. P., *MNRAS.*, 151 (1971), 237.
[7] Clube, S. V. M. and Dawe, J. A., *MNRAS.*, 190 (1980), 575.
[8] Murray, C. A., Vectorial Astrometry, Adam Hilger Ltd, Bristol, U. K., (1983).
[9] 巴连拿哥，恒星天文学教程，戴文赛等译，高等教育出版社，(1959).

New Progress in the Technique for Investigation of Statistical Parallaxes of Stars

Zhao Junliang
(Shanghai Observatory, Academia Sinica)

Abstract

The classical technique for determination of statistical parallaxes of stars, an important problem on stellar astronomy, is briefly reviewed, and it is pointed out that the technique is somewhat inaccurate in statistics. Strictly speaking, the determinations of solar motion and velocity ellipsoid are not strictly separable, and it is not advisable to regard secular and statistical parallaxes as quantities independent of each other. On the basis of the discussion mentioned above, this paper describes how to set up and develop the technique for the solution of kinematic parameters including statistical parallaxes by means of the maximum-likelihood principle. Among others the methods which were developed by Clube and Murray in 1970's and 1980's respectively are presented with emphasis. In the mathematical model used by Murray, it is assumed that the residuals $\vec{\nu}$ for individual stars in a group follow a three-dimension normal distribution, which leads naturally to the covariance matrix of the residual velocities included. So Murray's method can be considered to be the most rigorous at present, where 11 unknown parameters should be solved by use of an iterative procedure. Finally, a brief comparison is made between Clube's method and that of Murray.