

恒星的演化及其稳定性*

S. Chandrasekhar

(美国芝加哥大学)

一、引言

当提到原子时,在我们头脑中就有一个清晰的图象:一个中心核和一群环绕着它的电子。我们将原子设想为,其大小由埃(10^{-8} 厘米)来量度的小物体;我们也知道存在一百多种不同的原子。当然这种图象需要定量化,在现代量子理论中才被精确化。这整个理论的成功可追溯到两个基本事实。首先,氢原子基态的玻尔半径,即

$$\frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} \sim 0.5 \times 10^{-8} \text{厘米} \quad (1)$$

其中, h 是普朗克常数, m 是电子的质量, e 是它的电荷。玻尔半径提供了原子大小的一个正确度量;第二,索末菲精细结构常数的倒数

$$\frac{hc}{2\pi e^2} \sim 137 \quad (2)$$

它给出具有稳定轨道电子的中心核的最大正电荷数。这个中心核的最大电荷,是由狭义相对论效应用于轨道电子的运动所产生的。

我们现在问:能否象用自然常数(1)和(2)的组合来理解原子那样简单地来理解恒星的一些基本事实。本文中,我们打算证明,在有限的意义上,这是能够的。

关于恒星最重要的事实是它的质量。恒星的质量是用太阳质量 M_{\odot} (2×10^{33} 克)为单位来测量的。比太阳质量大很多或小很多的星体是少见的。现在恒星结构和演化理论之所以成功,在于用具有质量量纲的组合提供了恒星质量的正确量度:

$$\left| \frac{hc}{G} \right|^{3/2} \frac{1}{H^2} \simeq 29.2 M_{\odot} \quad (3)$$

其中: G 是引力常数, H 是氢原子的质量。在本文前半部分,基本是讨论关于(3)是如何得来的问题。

二、辐射压的作用

关于正常星体的一个重要事实是辐射压在其流体静力平衡中所起的作用。决定恒星流体

* 在1983年物理学诺贝尔奖金授奖仪式上的演说。

静力平衡的方程, 精确式是:

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2} \rho \quad (4)$$

其中: P 表示总压力, ρ 是密度, $M(r)$ 是半径为 r 的球内的质量。总压强 P 由物质的压强和辐射的压强组成。假定物质处于经典的麦克斯韦意义上的理想气体状态, 物质或气体的压强为:

$$p_{\text{气}} = \frac{k}{\mu H} \rho T \quad (5)$$

其中: T 为绝对温度, k 是玻尔兹曼常数, μ 是平均分子量(在通常星体情况下约为 1.0), 辐射压强为:

$$p_{\text{辐射}} = \frac{1}{3} \alpha T^4 \quad (6)$$

其中: α 为 Stefan 辐射常数; 因此, 如果辐射压强与总压强之比为 $(1-\beta)$, 可得:

$$P = \frac{1}{1-\beta} \frac{1}{3} \alpha T^4 = \frac{1}{\beta} \frac{k}{\mu H} \rho T \quad (7)$$

为了明显看出辐射压在星体平衡中的作用, 我们由前面的方程得到温度:

$$T = \left[\frac{k}{\mu H} \frac{3}{\alpha} \frac{1-\beta}{\beta} \right]^{1/3} \rho^{1/3} \quad (8)$$

并将压强 P 用 ρ 和 β 表示出来, 而不用 ρ 和 T 来表示, 即

$$P = \left[\left(\frac{k}{\mu H} \right)^4 \frac{3}{\alpha} \frac{1-\beta}{\beta^4} \right]^{1/3} \rho^{4/3} = C(\beta) \rho^{4/3} \quad (9)$$

爱丁顿首先强调了比例系数 $(1-\beta)$ 对天体结构理论的重要性。在他的著作《恒星的内部组成》一书中, 他将这个比例系数与“恒星的产生”联系起来。爱丁顿将常数组合(3)分离开来的论点的一个更合理说法如下:

存在一个一般性的定理 (Chandrasekhar, 1936), 这个定理说: 一个质量为 M 的恒星处于流体静力平衡之中, 且离恒星中心径向距离为 r 处的密度 $\rho(r)$ 不超过它内部的平均密度 $\bar{\rho}(r)$, 则中心的压强 P_c 必满足不等式:

$$\frac{1}{2} G \left(\frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} \bar{\rho}^{4/3} M^{2/3} \leq P_c \leq \frac{1}{2} G \left(\frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} \rho_c^{4/3} M^{2/3} \quad (10)$$

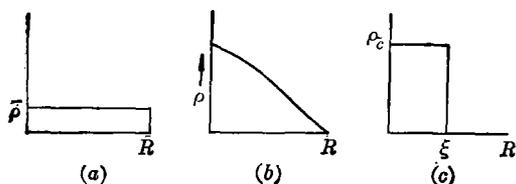


图 1. (a) 等于平均密度的均匀密度分布。
(b) 恒星中密度的非均匀分布。
(c) 等于中心密度的均匀密度分布。

其中: $\bar{\rho}$ 表示恒星的平均密度, ρ_c 为中心密度, 这个定理只是断言: 一个恒星中心的实际压强是在两个均匀密度组态的中心压强之间。一个的密度等于恒星体的平均密度, 另一个的密度等于中心的密度 P_c (见图 1)。如果不等式 (10) 不成立, 那么一般来讲, 就必须有某个区域, 在其中反向的密度梯度占优势; 这就意味着不稳定性。换句话说, 我们可以将不等式

(10)与星体的稳定存在的条件等价。

由不等式(10)的右边及(9)式中的 P 一道可得恒星稳定存在的条件是:

$$\left[\left(\frac{k}{\mu H} \right)^4 \frac{3}{\alpha} \frac{1-\beta_c}{\beta_c^4} \right]^{1/3} \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/3} GM^{2/3} \quad (11)$$

或等价地有

$$M \geq \left(\frac{6}{\pi} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{k}{\mu H} \right)^4 \frac{3}{\alpha} \frac{1-\beta_c}{\beta_c^4} \right]^{1/3} \frac{1}{G^{3/2}} \quad (12)$$

其中: β_c 是在恒星中心处的 β 值。现在, 根据 Planck 定律, Stefan 常数 α 的值为:

$$\alpha = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} \quad (13)$$

将此值代入(12)式中。我们得到:

$$\mu^2 M \left(\frac{\beta_c^4}{1-\beta_c} \right)^{1/2} \geq \frac{(135)^{1/2}}{2\pi^3} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{H^2} = 0.1873 \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{H^2} \quad (14)$$

由此看到, 不等式(14)已经分离出了质量量纲的自然常数组合(3)。将(3)式的数值代入, 得到不等式:

$$\mu^2 M \left(\frac{\beta_c^4}{1-\beta_c} \right)^{1/2} \geq 5.48 M_\odot \quad (15)$$

这个不等式提供了一个给定质量恒星 $(1-\beta_c)$ 的上限。于是:

$$1-\beta_c \leq 1-\beta_* \quad (16)$$

其中: $(1-\beta_*)$ 唯一地由恒星质量 M 和平均分子量 μ 按下列四次方程所确定:

$$\mu^2 M = 5.48 \left(\frac{1-\beta_*}{\beta_*^4} \right)^{1/2} M_\odot \quad (17)$$

在表 1 中, 我们列出了对于某些 $\mu^2 M$ 的 $(1-\beta_*)$ 。从这表可特别看出, 对于平均分子量等于 1 的为一个太阳质量的恒星, 中心的辐射压不超过总压强的 3%。

表 1 在质量 M 的星体中心的最大辐射压强 $(1-\beta_*)$

$1-\beta_*$	$M\mu^2/M_\odot$	$1-\beta_*$	$M\mu^2/M_\odot$
0.01	0.56	0.50	15.49
0.03	1.01	0.60	26.52
0.10	2.14	0.70	50.92
0.20	3.83	0.80	122.5
0.30	6.12	0.85	224.4
0.40	9.62	0.90	519.6

从前面的计算, 可以得出什么结论呢? 我们的结论是一定程度上方程(17)是实际恒星平衡的基础。也即当对恒星质量的测量有了一适当的范围时, 自然常数组合(3)也是恒星结构物理理论的基础。

三、恒星有足够能量冷却吗?

同样的自然常数组合(3)不久就出现在由爱丁顿以格言形式阐述的解决佯谬的更基本表达式中。这格言为:“恒星需要能量去冷却”。按照白矮星(如天狼星的伴星)存在的知识(它具有的平均密度在 10^5 — 10^7 克厘米 $^{-3}$ 范围内),当考虑一个气体星的最最终命运时,就出现这个佯谬。如爱丁顿所说:

“我不知道,当一个恒星一旦进入被压缩的状态。它将如何离开这个状态……。看来,当亚原子的能量供给停止时,恒星将处于难堪的境地。”(Eddington, 1926, p.172)。Fowler (1926) 将爱丁顿提出的佯谬用物理学的更清楚的语言表示如下:

“处于白矮星状态的恒星物质将辐射掉很多能量,以致它具有的能量比由在绝对零度时膨胀的正常原子组成的同种物质的能量小很多。如从该恒星移走一部分物质,同时也去掉压强,会发生什么情况呢?”Fowler用这个方法定量地提出了问题。

将一原子序为 Z 的原子电离为裸原子核,单位体积的静电能为:

$$E_V = 1.32 \times 10^{14} Z^2 \rho^{4/3} \quad (18)$$

而处于温度为 T 、密度为 ρ 的理想气体状态的自由粒子,单位体积的热运动动能 E_{kin} 为:

$$E_{kin} = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu H} \rho T = \frac{1.24 \times 10^8}{\mu} \rho T \quad (19)$$

如果去掉这种物质所承受的压强,则仅当

$$E_{kin} > E_V \quad (20)$$

或根据方程(18)和(19),仅当

$$\rho < \left(0.94 \times 10^{-3} \frac{T}{\mu Z^2} \right)^3 \quad (21)$$

才能恢复为普通的正常原子状态。若密度足够高,该不等式将明显地不成立。这就是Fowler所表示出的爱丁顿佯谬的本质。1926年,Fowler 在一篇题为“致密物质”的论文中解决了这一佯谬。该论文是恒星结构领域中的伟大里程碑式的论文之一。在这篇论文中,第一次引入了电子简并与费米统计的概念。

四、Fowler 消除爱丁顿佯谬,白矮星中电子的简并

在完全简并的电子气中,相空间中所有动量小于费米阈值的部分都被占据了,与泡利不相容原理一致,在六维相空间中每一个体积为 h^3 的“网络”中有两个电子。因此,如果 $n(p) dp$ 表示每一单位体积中,动量在 p 与 $p + dp$ 之间的电子数,那么完全简并的假定等效于,

$$\begin{aligned} n(p) &= \frac{8\pi}{h^3} p^2 \quad (p \leq p_0) \\ &= 0 \quad (p > p_0) \end{aligned} \quad (22)$$

动量阈值 p_0 由归一化条件确定:

$$n = \int_0^{p_0} n(p) dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_0^3 \quad (23)$$

其中: n 表示每单位体积的总电子数。

由(22)式的分布, 每单位体积电子的压强 p 和动能 E_{kin} 为:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_0} p^3 v_p dp \quad (24)$$

及

$$E_{kin} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_0} p^2 T_p dp \quad (25)$$

其中: v_p 和 T_p 为具有动量 p 的电子速度和动量。

如取非相对论关系

$$v_p = \frac{p}{m} \quad \text{及} \quad T_p = \frac{p^2}{2m} \quad (26)$$

由(24)和(25), 我们得到

$$P = \frac{8\pi}{15h^3 m} p_0^5 = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{5/3} \quad (27)$$

及

$$E_{kin} = \frac{8\pi}{10h^3 m} p_0^5 = \frac{3}{40} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{5/3} \quad (28)$$

Fowler 消除了爱丁顿佯谬, 即: 在白矮星内部预期可能占优势的温度和密度下, 电子将是高度简并的, 而 E_{kin} 必须按照(28)取值, 而不应按(19)式取值; (28)式得出:

$$E_{kin} = 1.39 \times 10^{18} (\rho/\mu)^{5/3} \quad (29)$$

现在, 将(18)与(29)比较, 我们看到, 对于发生在白矮星情况下密度为 $\rho \sim 10^5$ 克·厘米⁻³ 的物质, 总动能约为势能绝对值的两到四倍; 爱丁顿佯谬就不存在。Fowler 以下列富有洞察力的叙述结束他的论文:

“黑矮星物质可最好地比拟为处于最低量子态的一个简单的巨大分子。按费米-狄拉克统计, 由于它包含的巨大能量, 它的高密度可由一种方式也只可有一种方式达到。但这个能量耗散在辐射的部分并不多于一个普通原子或分子的能量。黑矮星物质与一个普通分子之间仅有的差别在于: 分子可存在于自由状态, 而黑矮星物质只能存在于很高的外部压强下。”

五、白矮星理论: 极限质量

简并电子气的与压强 P 相联系的内能(= $3P/2$)是零点能; 而且Fowler论文的基本内容是: 该零点能是如此巨大, 以至我们可以预期一个恒星最终可演变为一个所有能量都是这种能量的状态。Fowler的论点可用下列方式更清楚地表述(Chandrasekhar, 1931a)。

按照(27)所给的压强表示式, 我们可得下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} P &= K_1 \rho^{5/3} \\ \text{其中: } K_1 &= \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m(\mu_e H)^{5/3}} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

其中: μ_e 为每一电子的平均分子量。压强 P 和密度 ρ 以下列方式

$$P = K \rho^{1 + \frac{1}{n}} \quad (31)$$

联系起来的平衡组态是一个指数为 n 的 Emden 多方过程。因此, 建立在方程(30)上的简并组态是指数为 $3/2$ 的多方过程, 由多方过程理论立即得到下列关系:

$$K_1 = 0.4242 (GM)^{1/3} R \quad (32)$$

或数值上由(30)所给出的 K_1 为

$$\log_{10}(R/R_\odot) = -\frac{1}{3} \log_{10}(M/M_\odot) - \frac{5}{3} \log_{10} \mu_e - 1.397 \quad (33)$$

当质量为一个太阳质量, 且 $\mu_e = 2$, 则(33)预言 $R = 1.26 \times 10^{-2} R_\odot$, 平均密度为 $7.0 \times 10^5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 。这些值恰恰与白矮星观测到的半径和平均密度值有相同的量级。而且, 由(32)和(33)可知, 白矮星的半径是与质量的立方根成反比。于是, 由于这个原因, 对所有质量将预期出现有限的平衡组态。这曾被认为白矮星是恒星演化的最后阶段。

但是, 人们很快就认识到, 上述以 Fowler 前提为基础的简单理论需要修改。随着质量的增加, 在简并星的中心具有阈能值的电子, 其速度成为可与光速相比较了。因此, 对于质量为一个太阳质量的简并星(而 $\mu_e = 2$), 它的中心密度(约为平均密度的六倍)早已是 $4.19 \times 10^6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$; 这一密度对应阈动量为 $p_0 = 1.29mc$, 速度为 $0.63c$ 。因此, 必须考虑狭义相对论效应, 并对状态方程加以修改。这一修改可以很容易地完成, 假若

$$\left. \begin{aligned} v_p &= \frac{p}{m(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2}} \\ \text{和} \\ T_p &= mc^2 [(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} - 1] \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

代入(24)和(25), 以代替非相对论性方程(26)。我们发现, 得到的状态方程能用参量表示为:

$$P = Af(x) \quad \text{及} \quad \rho = Bx^3 \quad (35)$$

其中:

$$A = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3}, \quad B = \frac{8\pi m^3 c^3 \mu_e H}{3h^3} \quad (36)$$

而

$$f(x) = x(x^2 + 1)^{1/2} (2x^2 - 3) + 3 \sinh^{-1} x \quad (37)$$

类似地

$$E_{\text{kin}} = Ag(x) \quad (38)$$

其中:

$$g(x) = 8x^3[(x^2 + 1)^{1/2} - 1] - f(x) \quad (39)$$

按方程(35)或(36), 对足够低的电子浓度, 即 $x \ll 1$, 近似得到(30); 但对增加电子浓度($x \gg 1$), 压力趋向(Chandrasekhar, 1931b)

$$P = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} hcn^{4/3} \quad (40)$$

这一极限形式, 能非常简单地由方程(24)中代入 $v_p = c$ 而得即

$$P = \frac{8\pi c}{3h^3} \int_0^{p_0} p^3 dp = \frac{2\pi c}{3h^3} p_0^4 \quad (41)$$

由(23)消去 p_0 即可直接得到(40)。由狭义相对论的要求对状态方程的修改不仅无害, 而且, 正如我们现在要证明的, 对于简并组态的质量-半径关系的预期, 有引人注目的影响。

根据极限形式(41), P 和 ρ 之间的关系为

$$P = K_2 \rho^{4/3}, \quad \text{其中 } K_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{hc}{(\mu_e H)^{4/3}} \quad (42)$$

在这种极限情况下, 组态是指数为 3 的 Emden 多方过程。众所周知, 当多方指数为 3 时, 所产生的平衡组态的质量是唯一地由压力-密度关系中的比例常数 K_2 所确定。从而, 我们有

$$M_{\text{limit}} = 4\pi \left(\frac{K_2}{\pi G} \right)^{3/2} \times (2.018) = 0.197 \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e H)^2} = 5.76 \mu_e^{-2} M_\odot \quad (43)$$

(在方程(43)中, 2.018 是从 $n=3$ 的 Lane-Emden 方程的解所推得的一个常数。)

从一般考虑(Chandrasekhar, 1931c), 是很清楚的, 即简并组态的精确质量-半径关系必须给方程(43)确定的这种组态的质量提供一个上限; 而且, 当半径趋于零时, 组态的平均密度必须趋于无穷, 而 $M \rightarrow M_{\text{limit}}$ 。在(35)–(37) 所给出的精确的状态方程基础上所建立的平衡组态, 可以直接地建立这些条件。并发现确定这种组态平衡的方程为下列形式(Chandrasekhar, 1934b, 1935)

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\phi}{d\eta} \right) = - \left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2} \quad (44)$$

其中:

$$y_0^2 = x_0^2 + 1 \quad (45)$$

而 mcx_0 表示在组态中心电子的阈动量, η 为径向距离, 用单位

$$\left(\frac{2A}{\pi G} \right)^{1/2} \frac{1}{By_0} = l_1 y_0^{-1} \quad (46)$$

由适当的边界条件, 对于 y_0 的各种初始条件, 积分方程(44), 我们能推导出精确的质量-半径关系和其他的简并组态的平衡态性质。图 2 和图 3 描绘出计算的主要结果。

由上述考虑所得到的重要结论是: 首先, 对能成为简并组态的恒星, 作为它们演化的最后阶段, 其质量存在一个上限 M_{limit} ; 第二, 对于 $M > M_{\text{limit}}$ 的恒星, 必定有终态。但从目前的考虑, 还不能对这种状态作出预言; 最后, 可以看到自然常数组合(3)现在包含在(43)所给出的 M_{limit} 的基本范围内, 它在恒星结构和天体演化理论中的意义已是毋庸置疑了。

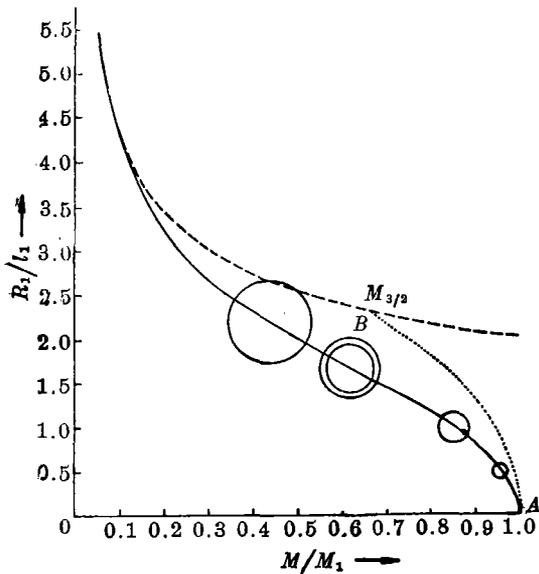


图 2. 实线表示精确的质量-半径关系(l_1 由(46)所定义, M_3 表示质量极限), \cdots 表示由指数为 3/2 的多方过程近似得到的低质量简并组态, 实线渐近趋向于对低质量简并组态的虚线, 能作为相对论性的情况来考虑的组态区域用阴影线表示 [$\rho > (K_1/K_2)^{3/2}$].

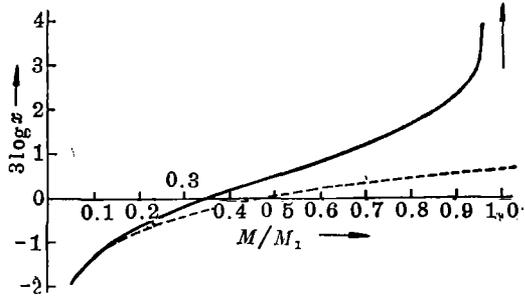


图 3. 实线表示高度坍缩组态的精确质量-半径关系, 当 $M \rightarrow 0$, 实线渐近于虚曲线。

六、在什么条件下正常恒星能形成简并核?

完全简并组态的质量上限一经建立起来, 要解决的问题就是如何将它与气体状态的恒星演化联系起来。如果星体的质量小于 M_{limit} , 假设它最终演化为完全简并态就成为合理的。可是, 如果质量比 M_{limit} 大, 那又将如何? 用第二节和第三节的方程和不等式对随之将是什么样的情形进行了探索(Chandrasekar, 1932, 1934a)。

要解决的第一个问题是在什么情况下, 原是气体的恒星将形成简并核。这个问题的物理方面, 从对理想流体状态方程(5)的偏离出发, 并考虑电子简并的效应, 能得到确切的回答。

例如, 假定我们在恒温下连续稳定地增加恒星密度, 恒星处于自由电子和原子核的高度电离状态, 且最初为由方程(5)所给出的理想气体。开始, 电子压力将随 ρ 线性增加; 很快就出现偏离。最终, 密度将按照由完全简并电子气满足的状态方程来增加(见图4)。值得注意的事实是, 状态方程的极限形式与温度无关。

然而, 为了考察演化过程中, 一个恒星出现简并核的情况, 更方便的是将电子压强(如同由理想气体状态所给出的)由 ρ 和 β_e 表示为

$$p_e = \frac{k}{\mu_e H} \rho T = \frac{\beta_e}{1 - \beta_e} \frac{1}{3} \alpha T^4 \quad (47)$$

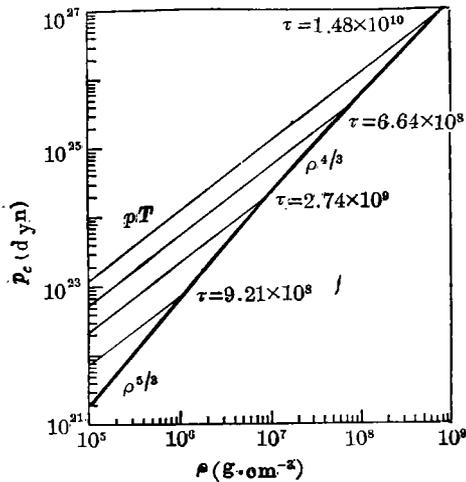


图 4. 温度为常数时, 随着密度的增加, 简并态的出现。

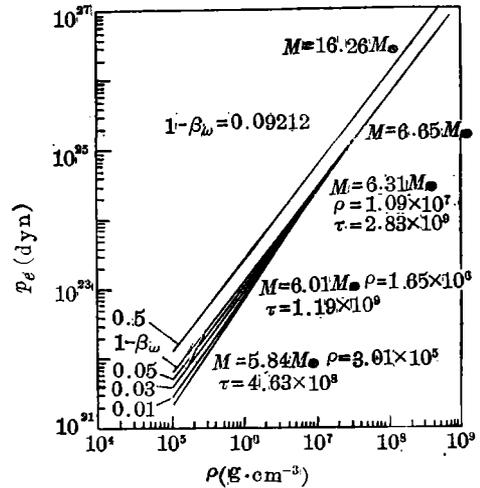


图 5. 在 β 一定时, 增加密度, 简并态开始。注意在 $1 - \beta > 0.09212$ 时没有交叉。在图中, $1 - \beta$ 是转换为标准模型下的恒星质量。

其中: p_e 现在表示电子压强, 然后, 与方程(9)类似, 我们可写出

$$p_e = \left[\left(\frac{k}{\mu_e H} \right)^4 \frac{3}{\alpha} \frac{1 - \beta_e}{\beta_e} \right]^{1/3} \rho^{4/3} \quad (48)$$

与方程(42)比较, 可得出如下结论: 如果

$$\left[\left(\frac{k}{\mu_e H} \right)^4 \frac{3}{\alpha} \frac{1 - \beta_e}{\beta_e} \right]^{1/3} > K_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{hc}{(\mu_e H)^{2/3}} \quad (49)$$

当简并占优势, 则不仅对指定的 ρ 和 T , 而且对所有有相同 β_e 的 ρ 和 T , 由经典理想气体状态方程给出的压强 p_e 将大于(49)给出的压强。

将(13)的 α 值代入, 则不等式(49)成为

$$\frac{960}{\pi^4} \frac{1 - \beta_e}{\beta_e} > 1 \quad (50)$$

或等效地

$$1 - \beta_e > 0.0921 = 1 - \beta_\omega \quad (51)$$

(见图5)。

从我们现在讨论的目的来看, 不等式(51)的主要内容是一个恒星变为简并的判据, 即辐射压必须小于 $(p_e + p_{rad})$ 的 9.2%。这最后的推论对于恒星演化的所有现行方案极为重要, 以致值得重复早先的论点的直接性和简单性。

早先的两个主要论点是: 第一, 当恒星质量增加, 辐射压就要占优势; 第二, 只有当辐射压不占总压强的重要部分时(确实, 如我们现在已看到的, 它必须不超过 $(p_e + p_{rad})$ 的 9.2%), 电子的简并是可能的。上述论点的第二个要点是直接的, 而且是简并物理学的基本结论; 但是第一点却要求某种扩充。

随着恒星质量的增加, 辐射压必须起占优势的作用。这是爱丁顿建立起来的恒星结构研

究中的最早的结果之一。这一事实的定量表述出现在爱丁顿的标准模型中，这一模型是以他早期的研究为基础，归纳在他的“恒星的内部组成”中。

对标准模型，参数 β (气体压强/总压力) 对整个恒星为一常数。根据这一假设，恒星是指数为 3 的多层球，方程 (9) 示明了这点，结果我们有关系 [见方程 (43)]

$$M = 4\pi \left[\frac{C(\beta)}{\pi G} \right]^{3/2} \quad (2.018) \quad (52)$$

其中 $C(\beta)$ 由方程 (9) 所定义。方程 (52) 为 β 的四次方程，与 β_* 的 (17) 式类似。方程 (52) 中，当 $\beta = \beta_*$ 得

$$M = 0.197\beta_*^{-3/2} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e H)^2} = 6.65\mu^{-2} M_\odot = \mathcal{M} \quad (53)$$

根据标准模型，具有质量大于 \mathcal{M} 的恒星，辐射压将超过总压强的 9.2%。因此， $M > \mathcal{M}$ 的恒星，在它演化过程的任何阶段，都不能在它的内部形成简并态。因此，对这种恒星，不可能形成最终的白矮星，除非它们能抛射出其质量的相当大的一部分。

当然，标准模型只是一个模型。然而，除了特殊情况，实验已经肯定了由标准模型在定量上所得出的结论的正确性，即超过 $7-8M_\odot$ 的恒星将按照与质量小的恒星很不相同的方式演化。差不多五十年以前所得出的这些结论，现在已使人信服。当时的论断是：

“给定一个包含电子和原子核(总电荷为零)的容器，无限地继续压缩这些物质，将发生什么情况？”(Chandrasekhar, 1932)。“小质量恒星的演化必大大不同于大质量恒星的演化。对于小质量恒星，白矮星阶段是走向完全熄灭的第一步，大质量恒星不能通过白矮星阶段，其他可能性还有待于探索。”(Chandrasekhar, 1934b)。

上面的这些论断至今还有其价值。

当大质量恒星的演化还不太清楚时，对于充分小质量恒星的最后阶段却是清楚的 (Chandrasekhar, 1934a)。原因是，应用不等式 (10)，在一个恒星中所能达到的最大中心压力必须小于简并态方程所给出的，即只要

$$\frac{1}{2} G \left(\frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} M^{2/3} < K_2 = \frac{1}{8} \left[\frac{3}{\pi} \right]^{1/3} \frac{hc}{(\mu_e H)^{4/3}} \quad (54)$$

或等效地

$$M < \frac{3}{16\pi} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e H)^2} = 1.74\mu_e^{-2} M_\odot \quad (55)$$

我们得出结论，对于质量小于 $0.43M_\odot$ (如果 $\mu_e = 2$) 恒星的演化是不会引起任何惊奇的。这种恒星演化的最后阶段只能是白矮星 (附带地，我们可以注意，(55) 式暗含着这样的意义，即质量 $\sim 10^{18}$ 克的“微”黑洞在现代宇宙中是不能自然地形成的)。

七、关于大质量恒星的演化和引力坍缩开始的最近进展的简要说明

从早先的考虑，这是很清楚的：大质量恒星不可能成为白矮星，必定引起其内部极端条

件的发展及超新星现象中引力坍缩的出现。但是所有这些以什么样的精确的方式发生, 尽管一些有能力的研究组作出了巨大的努力, 但仍然还难以弄明真相。必须考虑的一些事实如下:

首先, 由于大质量恒星 $1 - \beta_e > 1 - \beta_\omega$, 密度和温度将稳定增加而不受简并效应的约束。在这种考虑下, 碳的“核燃烧”将发生, 并伴随着中微子的辐射。中微子的发射将产生冷却及 $(1 - \beta_e)$ 的降低, 但它还是保持大于 $1 - \beta_\omega$ 。重要的是, 中微子的辐射在中心区起作用, 这也是 $(1 - \beta_e)$ 在这些区域降低的原因。密度和温度将继续增加, 直到氦开始燃烧, 并伴随着中微子的进一步辐射, 以及 $(1 - \beta_e)$ 的再下降。核燃烧的继续和 $(1 - \beta_e)$ 的降低将一直继续到 $1 - \beta_e < 1 - \beta_\omega$, 而在中心形成一个质量约为极限质量 ($= 1.4 M_\odot$, 当 $\mu_e = 2$) 的相对论性简并核。到这一阶段, 或此后不久, 某种不稳定性可能出现(见下面第八节), 接着是引力坍缩和(II型)超新星爆发。在某个时刻, 原来是高度相对论性的质量约为 $1.4 M_\odot$ 的简并核将成为中子星。这种情况的发生, 由下列事实所肯定, 即对脉冲星的质量的可靠估计, 一致地认为接近 $1.4 M_\odot$ 。然而, 在别的情况下, 也许是在大部分情况下, 当“宇宙尘埃沉积下来”后, 所留下的质量将超过稳定中子星所允许的质量; 在这种情况下, 将形成黑洞。

当星体质量不大时 ($M \sim 6 - 8 M_\odot$), 初始形成的简并核就不是高度相对论性的。但核心的质量随着核幔交界处核燃料的进一步燃烧而增加, 当核达到极限质量时, 不稳定性导致爆炸, 人们相信这就是 I 型超新星爆发的原因。

从前面对大质量恒星演化的晚期阶段所发生的情况的简要描述可以看出, 我们遇到的问题是异乎寻常的复杂, 其中包含着大量的物理因素。显然, 现在不宜对这类问题作详细的讨论。

八、相对论中的不稳定性*

(1) 球状恒星的振动不稳定性

现在来考虑某些类型恒星的不稳定性。这些不稳定性是由广义相对论效应得到的, 而在牛顿理论中是没有对应的效应。看来这些由相对论引起的新型不稳定性在讨论引力坍缩和大质量恒星的晚期阶段时, 起着重要的作用。

我们首先讨论球状恒星对于纯径向扰动的稳定性。这种稳定性的判据可直接由恒星的球对称径向振动的线性方程得出。在牛顿引力理论的框架内, 径向扰动的稳定性仅与绝热指数 Γ_1 的平均值有关。 Γ_1 是运动的流体元在拉格朗日描述下所得到的单位压强和单位密度相对变化的比例系数, 因此

$$\Delta P/P = \Gamma_1 \Delta \rho/\rho \quad (56)$$

稳定性的牛顿判据是

$$\bar{\Gamma}_1 = \int_0^M \Gamma_1(r) P(r) dM(r) / \int_0^M P(r) dM(r) > \frac{4}{3} \quad (57)$$

如果 $\bar{\Gamma}_1 < \frac{4}{3}$, 在 e 倍衰减时间 (由声波从中心传到表面所用的时间来测量) 之后, 跟着而来

* 感谢 D. Arnott 教授引导我查阅最近的文献, 并建议我写这一节。

的将是整体特性的动力学不稳定性。

当人们在广义相对论的框架里来考察这同一个问题时,发现稳定性还是与 Γ_1 的平均值有关; 不过与牛顿理论的结果不同的是, 稳定性也与恒星的半径有关 (Chandrasekhar, 1964a, 1964b, 1964c)。于是, 无论 Γ_1 可以多高, 只要半径小于史瓦西半径

$$R_S = 2GM/c^2 \quad (58)$$

一个确定的倍数, 不稳定性就将发生。为简单起见, 我们假设对整个恒星 Γ_1 是常数并等于 $5/3$ 。若 $R_1 < 2.4R_S$, 则恒星在径向扰动下将成为动力学不稳定的。进而, 若 $\Gamma \rightarrow \infty$, 对所有 $R < (9/8)R_S$, 不稳定性将发生。事实上, $(9/8)R_S$ 定义了一个在广义相对论中任何引力质量在静力平衡下的最小半径。这个重要的结果隐含在史瓦西 1916 年发表的一篇基础性的论文中 (史瓦西实际上证明了对于能量密度为常数的恒星, 有 $R > (9/8)R_S$)。

在某种意义上, 相对论所引起的这种不稳定性最重要的结果是, 若 Γ_1 (为简单起见, 仍假定为常数) 不同于 $4/3$, 而且比 $4/3$ 仅大一个小的常数, 对于 R 为 R_S 的一个大的倍数的情况下, 不稳定性就会产生。对于平衡状态结构本身, 与广义相对论效应已不大相关了。确实, 从恒星的径向振动所遵从的方程, 在广义相对论的一级后牛顿近似下, 对所有

$$R < \frac{K}{\Gamma_1 - 4/3} \frac{2GM}{c^2} \quad (59)$$

其径向微扰的不稳定性就发生了。上式中 K 是一个常数, 它在牛顿框架内, 与平衡状态中密度与压强的整体*行为有关。因此, 对指数为 n 的多层球, 常数值为

$$K = \frac{5-n}{18} \left[\frac{2(11-n)}{(n+1)\xi_1^4 |\theta'_1|^3} \int_0^{\xi_1} \theta \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 \xi^2 d\xi + 1 \right] \quad (60)$$

其中: θ 是标准归一化的 Lane-Emden 函数 (即当 $\xi=0$, $\theta=1$)。 ξ 是无量纲的径向坐标, ξ 定义多层球的边界 (在那里 $\theta=0$), 而 θ'_1 是 θ 对 ξ 的微商。

表 2 中列出了不同指数多层球下的 K 值。应特别注意的是, 对 $n \rightarrow 5$, K 无限增加, 而中心变为越来越密**。于是对于 $n=4.95$ (对这个多方指数, $\rho_c = 8.09 \times 10^6 \bar{\rho}$), $K \sim 46$ 。换句话说, 对于高度中心致密的大质量恒星 (这时 Γ_1 与 $4/3$ 的差别小到 0.01)***, 当它的半径低于 $5 \times 10^3 R_S$ 时, 相对论引起的不稳定性将出现。显然, 在这些问题的范围内, 一定要考虑相对论性的不稳定性。

上述的结果能进一步应用于极限质量附近的简并组态 (Chandrasekhar 和 Tooper, 1964)。由于在这些高度相对论性的组态中, 电子速度接近光速。 Γ_1 的有效值非常接近于 $4/3$, 后牛

* 这是因为我们将不稳定性作为整体来描述的。

** 本文写好后, 已经证明 (Chandrasekhar 和 Lebovitz, 1984), 对于 $n \rightarrow 5$, K 的渐近值是:

$$K \rightarrow 2.3056/(5-n)$$

而且, 沿着多方过程, 不稳定性判据 (59) 能表示为另一种形式:

$$R < 0.2264 \left(\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \right)^{1/3} \frac{2GM}{c^2} \frac{1}{\Gamma_1 - 4/3} (\rho_c / \bar{\rho} \gtrsim 10^6)$$

*** 由于辐射压强在这些大质量星体中占优势, 而且 β 很接近于零。

表 2 不等式 (59) 中, 对不同的多方指数 n 的 K 值

n	K	n	K
0	0.452381	3.25	1.28503
1.0	0.565382	3.5	1.49953
1.5	0.645063	4.0	2.25338
2.0	0.751296	4.5	4.5303
2.5	0.900302	4.9	22.906
3.0	1.12447	4.95	45.94

顿相对论性不稳定性将发生于比极限质量小一点的质量中。考虑发生在质量比 M_{limit} 小的恒星中的径向振动的不稳定性, 沿着简并组态的系列, 振动周期必有一最小值。能估计出这最小值约为 2 秒 (见图 6)。由于脉冲星 (当它们被发现时) 的周期比最小值小很多, 所以它们接近极限质量的简并组态的可能性就被排除了; 这就是确定脉冲星是中子星的决定因素之一 (奇怪的是, 由于我们在第七节中已经解释过的原因, 由超新星爆发所得到的脉冲星, 其质量近于 $1.4M_{\odot}$)。

最后, 我们可以注意到, 相对论效应引起的径向不稳定性是存在一个稳定的最大质量的根本原因: 它是广义相对论中, 流体静力平衡所遵从的方程的一个直接推论 [关于各种可采纳的状态方程, 对中子星径向振动周期的完整研究, 见 Detweiler 和 Lindblom (1983)]。

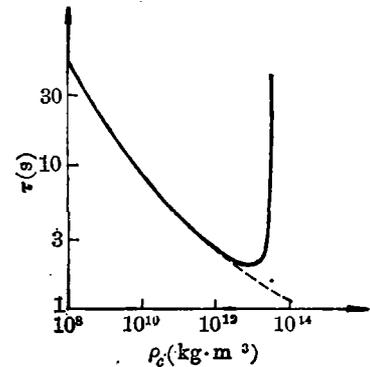


图 6. 对完全简并状态的径向振动周期的变化。注意到当质量接近极限质量时, 周期趋向无穷大。结果, 沿这些状态, 存在一个最小的振动周期; 这最小周期近似为 2 秒。
(取自 Skilling (1968), p.59)

九、相对论中的不稳定性

(2) 由非轴对称振动模式产生的引力辐射所引起的自转恒星的长期不稳定性

现在来讨论由广义相对论预言的对旋转状态适用的不同类型的稳定性。事实上, 这类新的不稳定性起源如下: 由振动的非轴对称模式产生引力辐射的可能性导致一种耗散机制, 广义相对论将这种耗散机制引入到旋转质量上, 就得到一类新的不稳定性 (Chandrasekhar, 1970a, 1970b, 1970c)。看来, 这种不稳定性限制了脉冲星自转周期。不过, 我们将先解释这种新的不稳定性的性质和起源。

大家知道, 带自转的均匀质量的可能平衡状态是扁球面的麦克劳林体 (这些属于经典椭球体问题见 Chandrasekhar (1968))。当我们考察麦克劳林椭球面的二次谐振动时 (在以与自转速度共转的参考系中), 人们发现, 在这些模式中其方位角与 $e^{2i\psi}$ 有关的两个模式, 振动的特征频率 σ 与偏心率 e 的关系如图 7 所示。可以看出这些模式之一是当 $e=0.813$ 时成为中性的 ($\sigma=0$)。而当 $e=0.953$ 时, 两模式吻合。但过了这一点, 就互为复共轭。相应地, 这一点以后, 麦克劳林椭球成为动力学不稳定的 (首先由 Riemann 得出)。另一方面, $e=0.813$ 处, 中性模式起源于: 在这一点, 分叉出一个三轴椭球——雅可比椭球——新的平衡系列。

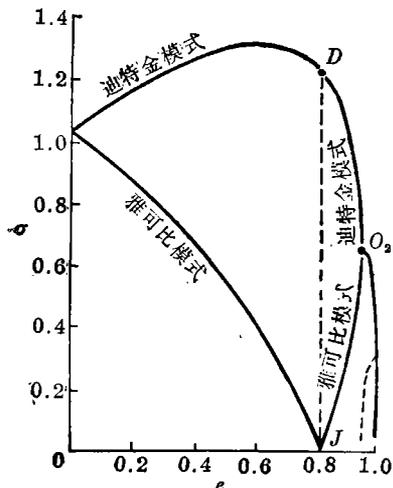


图7 麦克劳林椭球二次谐振动的两个模式的特征频率用 $(\pi G \rho)^{1/2}$ 作单位。雅可比系列在 $e=0.813$ 、 $\sigma=0$ 处，从麦克劳林系列中分出，迪特金在D点以另一模式的一支出现。在 O_2 ($e=0.9529$) 麦克劳林椭球成为动力不稳定的。 O_2 以后，频率的实部和虚部分别以实线和点线表示。粘滞耗散导致雅可比模式一支的不稳定性；辐射反作用导致迪特金模式的 DO_2 一支的不稳定性。

一个新的三轴系列(迪特金椭球系列)在该点的分叉相联系的。这些迪特金椭球，当它们与雅可比椭球共形时，不同之处在于它们在惯性系中为静止，而且把它们的三轴图形归因于内部的涡旋运动。从这些事实所得的重要结论是：在广义相对论范围内，从由变形的迪特金模式(在惯性系中的准稳态)而不是雅可比模式(在旋转系中准稳态)所产生的辐射反作用进行推导，我们能期待有长期不稳定性。

一个由辐射反作用所导致的关于长期不稳定性的事实由Friedman(1978, 也可参见Friedman和Schutz, 1977)和Comins(1979a, b)所发现；当 m 为较大值($m=3, 4, \dots$)时，模式在较小的偏心率时成为不稳定性，尽管不稳定的 e 倍时间很快地变长。因此，由Friedman所作的初步计算(1983)，从 $m=3$ (或4)的模式得到的长期不稳定性，它使脉冲星自转的周期受到限制。

从前面的讨论看出，我们所考虑的这两类由相对论引起的不稳定性在我们所考虑的范围是一定起着重要作用的。

开尔文在1883年曾对后一考虑进行过猜测。

“如果存在粘滞性(即使是很小)，在0.81以后，平衡不能是长期稳定的。”

开尔文的理由在于，粘滞性耗费能量，却不耗费角动量。因为对于相同的角动量，雅可比椭球有着比麦克劳林椭球要低的能量，人们可能预期粘滞的作用是消耗麦克劳林椭球中多余的能量并转变到能量较低的雅可比椭球。对两个振动模式粘滞耗散效应的详细计算(如图7所示，Chandrasekhar, 1968)确实肯定了开尔文的猜想。人们发现，粘滞耗散使得在 $e=0.813$ 处成为中性的模式，在该点以后以 e 倍的时间成为不稳定的，这个时间与运动学粘滞的大小成反比，在 $e=0.953$ 点处(在该处动力学不稳定性出现)进一步单调地减少到零。

由于引力辐射既耗费能量又耗费角动量，它不会使雅可比模式成为不稳定，但在相同的偏心率情况下，在另一模式中导致不稳定性。初看起来，可能显得奇特，但是，我们这里遇到的情况，却阐明了某些重要的结论。

如果不看旋转系中的正常模式，而在惯性系中分析它们，会发现，由于辐射反作用在 $e=0.813$ 处成为不稳定的模式，在该点事实上是中性的。这种在惯性系中为中性的模式，是与这样的事实相对应，即在该点的中性变形是与

十、黑洞的数学理论

到此为止，我们只考虑了完全简并组态质量上限的存在以及由相对论所得出的不稳定性

这两者给恒星演化的晚期阶段所带来的限制。从这些及相关的因素出发, 不可避免的结论是: 作为大质量恒星的演化的必然最终产物之一的黑洞将形成, 而且它们一定大量存在于现在的宇宙之中。在这最后一节, 我要非常扼要地叙述广义相对论对此结论必须说些什么。不过, 首先我要精确地定义什么是黑洞。

黑洞将三维空间分为两个区域: 一个是以称之为视界的二维光滑曲面为边界的内区域, 一个是视界以外的渐近平直的外区域, 而且要求(作为定义的一部分)内区域中的点不能与外区域中的任何点互通信息。任何在内区域发出的光讯号不可能通过视界, 这就保证了“不通信息”。外区域的渐近平直的要求等效于: 黑洞在空间中是孤立的, 而且在离视界很远处, 时空接近于地球上物理学所习惯的时间和空间。

在广义相对论中, 我们要找与上面所说的两个要求相容的爱因斯坦方程的真空解。令人惊奇的是, 广义相对论对稳定的黑洞(即不依赖于时间)可以给出一个简单的、唯一由两个参量确定的解族, 与这些非常简单又必要的要求相适应。这就是克尔族, 其中两个参量就是黑洞的质量和黑洞的角动量。更引人注目的是, 描述这些解的度规是简单的, 并且可以明显地写出来。

我不知道我所说的全部含意是否已表达清楚, 我再作一次解释。

黑洞是具有质量为几个太阳质量到数百万个太阳质量的宏观物体。它们可被看作为稳定和孤立的, 它们中的每一个都是精确地由克尔解所描述。这是我们所有的对宏观物体进行精确描述的唯一例子。在我们周围所看到的宏观物体, 都是由各种力所支配, 这些力又是由各种物理理论的各种近似推得的。相反, 在黑洞的构造中, 仅有的元素是我们关于空间和时间的基本概念。因此, 由定义, 黑洞是存在于宇宙中的最理想的宏观物体, 而且由于广义相对论为它们的描述提供了一个简单的、唯一的双参量解族, 所以它们也是最简单的物体。

现在来讨论黑洞的物理性质。研究它们的最好办法是考察一个外界的微扰(如不同种类的入射波)所引起的反应。这种研究揭示出克尔时空解析上的丰富性, 这是人们几乎没有想到的。这里不去讨论这些技术性的细节(作者在 1974—1983 年连续对黑洞的数学理论的研究, 总结在最近出的书中。Chandrasekhar, 1983b)。现在可以有把握地说, 和以前的预料相反, 现在所有的数学物理标准方程都能精确地在克尔时空中解出来。而且这种解预言了各种物理现象, 即黑洞一定在它们与外部世界的相互作用之中显现出来。

黑洞的数学理论是相当复杂的课题。但是, 对它的研究使我相信古代格言所说的:
简单是真理的标志,
美丽是真理的光辉。

参 考 文 献

- [1] Chandrasekhar, S., *Philos. Mag.*, **11** (1931a), 592.
- [2] Chandrasekhar, S., *Astrophys. J.*, **74** (1931b), 81.
- [3] Chandrasekhar, S., *MNRAS*, **91** (1931c), 456.
- [4] Chandrasekhar, S., *Z. Astrophys.*, **5** (1932), 321.
- [5] Chandrasekhar, S., *Observatory*, **57** (1934a), 93.
- [6] Chandrasekhar, S., *Observatory*, **57** (1934b), 373.
- [7] Chandrasekhar, S., *MNRAS*, **95** (1935), 207.

- [8] Chandrasekhar, S., *MNRAS*, 96 (1936), 644.
- [9] Chandrasekhar, S., *Astrophys. J.*, 140 (1964a), 417.
- [10] Chandrasekhar, S., *Phys. Rev. Lett.*, 12 (1964b), 114.
- [11] Chandrasekhar, S., *Phys. Rev. Lett.*, 12 (1964c), 437.
- [12] Chandrasekhar, S., *Astrophys. J.*, 142 (1965), 1519.
- [13] Chandrasekhar, S., *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, Yale University, New Haven, (1968).
- [14] Chandrasekhar, S., *Astrophys. J.*, 161 (1970a), 561.
- [15] Chandrasekhar, S., *Phys. Rev. Lett.*, 24 (1970b), 611.
- [16] Chandrasekhar, S., *Phys. Rev. Lett.*, 24 (1970c), 762.
- [17] Chandrasekhar, S., Edward Arthur Milne: his part in the development of modern astrophysics, *Q. J. R. Astron. Soc.*, 21 (1980), 93.
- [18] Chandrasekhar, S., *Eddington: The Most Distinguished Astrophysicist of His Time*, Cambridge University, Cambridge, (1983a).
- [19] Chandrasekhar, S., *The Mathematical Theory of Black Holes*, Clarendon, Oxford, (1983b).
- [20] Chandrasekhar, S. and Lebovitz, W. R., *MNRAS*, (in press) (1984).
- [21] Chandrasekhar, S. and Tooper, R. F., *Astrophys. J.*, 139 (1964), 1396.
- [22] Comins, N., *MNRAS*, 189 (1979a), 233.
- [23] Comins, N., *MNRAS*, 189 (1979b), 255.
- [24] Detweiler, S. and Lindblom, L., *Astrophys. J. Suppl.*, Ser. 53 (1983), 93.
- [25] Eddington, A. S., *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge University, Cambridge, (1926).
- [26] Fowler, R. H., *MNRAS*, 87 (1926), 114.
- [27] Friedman, J. L., *Commun. Math. Phys.*, 62 (1978), 247.
- [28] Friedman, J. L., *Phys. Rev. Lett.*, 51 (1983), 11.
- [29] Friedman, J. L. and Schutz, B. F., *Astrophys. J.*, 222 (1977), 281.
- [30] Skilling, J., *Pulsating Stars*, Plenum, New York, (1968).

张镇九 杨丕博译自 *Rev. Mod. Phys.*, 56 (1984), 137—147. 宋国玄校

On Stars, Their Evolution and Their Stability

S. Chandrasekhar

(The University of Chicago, USA)