

轨道共振问题

刘林

(南京大学天文系)

提 要

本文较全面地阐述天体力学中的轨道共振问题。首先介绍共振问题的提法和各种共振现象；继而介绍研究轨道共振问题的几种动力模型、方法和由此而得到的有关共振运动的主要特征与一些基本结论。最后提出关于轨道共振问题有待进一步研究的几个课题。

一、引 言

在天体力学领域里讨论轨道摄动时，若用分析方法(例如变换方法^{[1]-[3]})建立摄动解，那么，在构造相应的摄动小参数 ε 的幂级数过程中，将会出现各种形式的小分母。对于第三体摄动，小分母的一般形式为 $1/(qn - pn_1)$, $n_1/n \approx q/p$, n 和 n_1 分别为运动天体和摄动天体的平均运动角速度， q/p 是一有理数，这称为通约问题。当小天体绕着一个扁球形(太阳系中各大行星均是如此)的中心天体运动时，小分母的形式为 $1/(1 - 5\cos^2 i)$, $\cos^2 i \approx 1/5$, i 是小天体轨道对中心天体赤道面的倾角，这称为临界角问题；如果中心天体又是非旋转对称的，除上述小分母外，还有形如第三体摄动中的那一类小分母(例如人造地球卫星中，24小时同步卫星的 $q/p = 1/1$ 项特别重要)。若记 $\delta = (qn - pn_1)/n$ 或 $(1 - 5\cos^2 i)$ ，那么，只有当 $\delta > \varepsilon^{1/2}$ 时，上述摄动级数解才能构成，否则不能构成。Арнольд曾对这种出现小分母的变换序列的收敛性进行过讨论^[4]；Garfinkel 则具体用 Bohlin-von Zeipel 方法(按 $\varepsilon^{1/2}$ 的幂展开的一种变换方法)消除变换序列中的小分母^[5]。那么 $\varepsilon^{1/2}$ 这个临界值有何特殊意义呢？研究结果表明，它不仅仅是由数学处理方法引进的一个特殊值，还具有某种深刻的力学含义，即相应的运动具有一般运动所不具备的某些特征。这种力学上的特殊现象，就是本文要介绍的轨道共振(Orbital Resonance)；对于 $\delta \leq \varepsilon^{1/2}$ ，在一定条件下，相应的运动将会出现一种独特的“奇异”现象，天平动(libration)。

上述共振现象在太阳系中是很普遍的。如木星轨道附近小行星带的分布(小行星轨道与木星轨道的共振)；自然卫星的轨道共振(木星的 Galilean 卫星 1, 2, 3 之间的三体共振，土星的第 6 与第 7 颗卫星之间的轨道共振等)；人造地球卫星的轨道共振(倾角 $i \approx 63^\circ 26'$ 的轨道拱线摆动，24小时同步卫星在地球赤道上空某一平衡位置附近的漂移等)。不仅太阳系如此，在其他星系、星团中也有类似现象。除轨道共振外，还有公转轨道与天体自转之间的共振，

导致某种平衡(这一类问题, 本文不予介绍)。因此, 力学上的轨道共振现象几乎是普遍存在的, 这很自然地就引起了众多天文学家们的注意。

早在1902年, Poincaré就在讨论小行星 Hecuba 群的运动中计算了通约引起的长周期摄动^[6], 1964年, Schubart改进了Poincaré的工作, 并建立了研究限制性三体问题中轨道共振的一类平均模型^{[7]-[10]}, 这被称为Schubart模型。Froeschlé, Greenberg等人引用Schubart模型, 对共振运动的演化形态作了数值探讨(用截面法寻找不变曲线, 讨论周期解的稳定性等)^{[11]-[18]}。Wisdom在Schubart平均模型的基础上作了进一步的近似, 从而构成代数映射, 研究了共振运动($q/p=1/3$)在更长时间间隔内的演化形态^[9]。Garfinkel则引进了研究共振运动的一种更简单的平均模型——理想共振模型^[5], 他的目的是要以此建立消除小分母的幂级数解(按 $e^{1/2}$ 的幂展开), 尽管这种形式的近似分析解并无多大实用价值, 但由此得到的一些简单结论却有助于我们对共振运动基本特征的了解。Franklin等人讨论了小偏心率($q/p=1/2$)情况下的共振情况^[20]。除上述基本研究外, Jeffreys等人讨论了共振运动中的非引力效应、碰撞效应和统计理论以及与Kirkwood空隙的关系^{[21]-[25]}; Lissauer等人专门讨论了自然卫星的轨道共振(土星环, 土卫6与7, Galilean卫星1, 2, 3等)^{[26]-[29]}; Hori等人讨论了近地卫星轨道处于临界角($i \approx 63^\circ 26'$)情况下的拱线摆动规律^{[30], [5], [31]}; Henrard引进绝热不变量, 讨论了含有某一参数(该参数具有慢变化)的理想共振问题^{[32], [33]}; Moore等人还推广了Garfinkel的工作, 讨论了具有两个自由度的共振问题^{[34], [35]}。

从1983年起, 我们在过去的工作^{[27], [31]}基础上, 对共振运动开始了系统的研究^{[36]-[39]}。首先是更全面地深入讨论共振运动的基本特征、共振运动受各种力学因素的影响, 然后将进一步探讨共振运动的长期演化形态。这一系列研究(包括正在进行的), 一方面是想澄清和统一上述研究中的一些模糊和不一致的结论, 另一方面是尽可能地针对实际动力模型, 探讨那些主要力学因素对共振运动影响的规律, 从而更好地去解释某些特殊天象(如Kirkwood空隙等)。

下面将结合目前已得到的有关共振运动的一些主要结论和我们的研究结果, 作较系统的介绍。

二、理想共振的基本结论

Garfinkel的理想共振模型尽管简单, 可它毕竟包含了主要摄动项, 无疑是可以反映共振运动的基本特征的, 我们也是从这一模型着手研究共振的基本问题的。

无论是第三体摄动中的通约情况, 还是近星卫星(指大行星的内层卫星和近地卫星)所受到的非球形(包括带谐项和田谐项)摄动引起的临界角问题和通约问题。经过适当的变换, 消除摄动函数中的普通周期项而保留主要共振项, 可使这类问题简化为一个自由度的动力系统, 相应的哈密顿函数为^{[5], [36]}

$$F(y, x) = B(y) + 2A(y) \sin^2 x, \quad (1)$$

其中

$$A(y) = |F_1(y)|, \quad B(y) = F_c(y) - A(y) \quad (2)$$

$F_0(y)$ 是哈密顿函数的无摄部分, 而 $F_1(y)$ 则是摄动部分, 有

$$A(y) > 0, \quad \frac{A(y)}{|B(y)|} = 0(\varepsilon) \quad (3)$$

其中 ε 就是摄动小参数。这里要说明一点, 在临界角问题中, $F_0(y)$ 是一阶摄动部分, 而 $F_1(y)$ 却是二阶摄动部分, 量级之间关系同上。 y 是矩(动量), x 是角坐标。例如, 在第三体摄动的通约问题中(相应于 $n_1/n=q/p$), y 和 x 分别对应于变量 \tilde{L} 和 $\tilde{\varepsilon}/2$ (或 $\tilde{\varepsilon}/2 + \pi/2$),

$$\tilde{L} = \sqrt{\mu a} / q, \quad (4)$$

$$\tilde{\varepsilon} = qM - pM_1 + p\beta, \quad \beta = (\omega + \Omega) - (\omega_1 + \Omega_1)$$

$\sin^2 x$ 的原形式是 $\cos \tilde{\varepsilon}$; 在临界角问题中, 则分别对应于 $G = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$ 和 $g = \omega$, $\sin^2 x$ 的原形式是 $\cos 2g$; ...。这里所引用的符号 a, e, ω, Ω, M , 都是通常采用的椭圆轨道根数, μ 是引力常数。必须注意, $A(y)$ 中常伴有偏心率 e 因子。例如在 $n_1/n=q/p$ 的通约问题中, e 因子的形式为 $e^{|p-q|}$ (值 $|p-q|$ 称为共振的阶, 例如 $n_1/n=1/2$ 就对应一阶共振)。因为 $e=e(y)$, 它将影响共振的基本性质^[36], 这正是Garfinkel 等人所忽视的一个重要因子。

哈密顿函数(1)对应的运动方程为

$$\dot{y} = -\frac{\partial F}{\partial x} = P(y, x) = 2A \sin 2x \quad (5)$$

$$\dot{x} = -\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) = -B' - 2A' \sin^2 x$$

其中 B' 和 A' 表示对 y 的偏导数。该方程存在一“能量”积分, 即

$$F(y, x) = \bar{h} \quad (6)$$

方程(5)中的 B' 包含了 $(qn - pn_1)$ 或 $(1 - 5\cos^2 i)$ 形式的项, 这正是导致小分母的原因。

当 $(qn - pn_1) \approx 0$ 或 $(1 - 5\cos^2 i) \approx 0$ 时, 方程(5)存在初等奇点(即平衡解) $y=y_0$, $x=x_0$, 满足

$$\dot{y} = P(y_0, x_0) = 0, \quad \dot{x} = Q(y_0, x_0) = 0 \quad (7)$$

显然, $x_0 = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \dots$, 根据 $\sin 2x$ 和 $\sin^2 x$ 的周期性, 我们只需讨论 $x_0 = 0$ 和 $\pi/2$ 这一对, 其余各对的结构完全相同。由于方程(5)存在积分(6), 因此, 根据Dirichlet 定理^[41]可知, 平衡解 (y_0, x_0) 的性质可由线性化判别式

$$\Delta = ad - bc \quad (8)$$

的符号完全确定。其中 a, b, c, d 分别按下列各式

$$a = \frac{\partial P}{\partial y} = 2A' \sin 2x, \quad b = \frac{\partial P}{\partial x} = 4A \cos 2x, \quad (9)$$

$$c = \frac{\partial Q}{\partial y} = -B'' - 2A'' \sin^2 x, \quad d = \frac{\partial Q}{\partial x} = -2A' \sin 2x$$

在点 (y_0, x_0) 处取值。不难看出,

$$a = d = 0 \quad (10)$$

那么, b 和 c 的符号就确定了平衡解的性质, 即 $bc < 0$ 对应中心(Center), 记作 (y_c, x_c) ; 而

$bc > 0$ 则对应鞍点(Saddle), 记作 (y_s, x_s) 。中心和鞍点分别对应一条根数 a, e, i 不变的椭圆轨道, 前者是稳定的(指轨道稳定), 而后者则是不稳定的。

从(9)式可以看出, b 的符号对 $x_0=0$ 和 $\pi/2$ 都是确定的, 前者对应 $b > 0$, 后者则有 $b < 0$; 而对某些问题, c 的符号将受到 e 值(确切地说, 应是平衡解处的 e 值, 即 $e=e(y_0)$, 而不是初值, 这一点也容易被人们所忽视)的影响。这从(9)式也不难看出, 在 $x_0=0$ 和 $\pi/2$ 处, 分别有

$$c = -F_0'' + A'' \quad (11)$$

和

$$c = -F_0'' - A'' \quad (12)$$

若讨论一阶共振, A 中就含有 e 的一次因子, 于是在 A' 中出现 $1/e$ 项, 而 A'' 则会出现 $1/e_0$ 项, 同时有 $F_0'' > 0$, $A'' < 0$, 因此在 $x_0=0$ 处总有 $c < 0$, 这导致 $bc < 0$, 平衡点就是中心, 其性质是确定的; 而对 $x_0=\pi/2$, c 将会随着该点处 e 值的变化而改变符号, 从而改变平衡点的性质和分布。

当 $\delta \leq e^{1/2}$ 时, 在适当的初始条件下, 方程(5)的平衡解是存在的, 其分布情况(仅对 $x_0=0$ 和 $\pi/2$ 而言)有下列三种:

1. 中心($x_c=0$)与鞍点($x_s=\pi/2$)成对出现(见图1),
2. 仅有中心($x_c=0$)而无鞍点($x_0=\pi/2$ 上的点均为常点, 见图2),
3. 两个中心一个鞍点(见图3)。

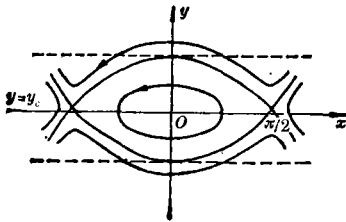


图 1

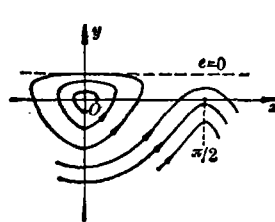


图 2

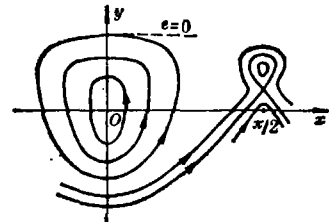


图 3

在中心的领域内都是闭轨线。对于第2和第3种情况, 轨线的分布都受到渐近线 $e=0$ 的“约束”。而第3种情况(在 $q/p=1/2, 2/3$ 等一阶共振中出现)就是上面分析的 $A(y)$ 中含 e 因子所引起的。在 $x_0=\pi/2$ 处, 小 e 使 $c > 0$, 对应鞍点, 而由初等奇点的分布规律, 在 $x_0=\pi/2$ 上还应存在一平衡解, 此处 e 值不太小, 仍有 $c < 0$, 它对应中心。故存在两个中心, 但第二个中心的邻域与第一个中心(在 $x_0=0$ 处)的邻域相比极小, 在实际运动中几乎不可能出现。

根据上述理想共振的一些结论, 使我们了解到以下几点:

1. 当 $\delta \leq e^{1/2}$ 时, 在构造小参数 e 的幂级数解的过程中出现的小分母, 实际上对应力学上的一种特殊运动形态。其特征是, 存在平衡解(中心和鞍点, 它们是一种特殊的椭圆轨道), 在相平面 (x, y) 上具有中心性质的平衡点周围, 是一条条闭轨线(见图1中 $x=0$ 的邻域), 它们是与上述特殊椭圆轨道的偏离受到一定限制的变化椭圆轨道, 特别是对 x 的限制, 它表明运动天体与摄动天体的某种经度差 ϑ 或拱线方向 g 在平衡值附近摆动, 前者说明两天体是合

(对24小时同步卫星而言,是指其在赤道上空的相对方位)在某一特殊范围内,而后者则说明拱线在摆动而不是旋转。显然,上述现象对应一种稳定状态,这种在一定范围内的运动,称为天平动(libration),它就是轨道共振的一个最基本特征。

2. 在相平面 (x, y) 上,以平衡解对应的 $y=y_0$ 为中线、量级为 $\varepsilon^{1/2}$ 的 y 尺度为“半径”所构成的区域(即图1中虚线所包围的区域),称为共振带。显然,当 $\delta > \varepsilon^{1/2}$ 时,运动是正常的,它对应构造 ε 的幂级数解无困难;而当 $\delta \leq \varepsilon^{1/2}$ 时,运动将会出现“异常”现象。但即使 $\delta < \varepsilon^{1/2}$,在具有鞍点性质的平衡点附近,运动也是“正常”的, x 的变化不受任何限制,有时也被称为循环共振^[5]。对于这一类运动,只是接近天平动区域边界的轨道,相应的 a, e, i 有振幅较大的周期变化(振幅达 $\varepsilon^{1/2}$ 的量级),除此之外,并无任何其他特征。因此,人们常把那些属于天平动范围的运动称为共振运动。由共振带内轨线的分布可知,当仅具备 $\delta \leq \varepsilon^{1/2}$ (对应 y 的条件)时,并不能肯定相应的运动一定是天平动,还必须看第二个条件,即 x (\tilde{e} 或 g)对平衡位置偏离的程度。我们曾给出一个具体判别运动是否属于天平动区域的条件——能量判别式^[83]。当 y 和 x 的初始值给定后,立即可判定它属于那种类型的共振——天平动或循环。

3. 小分母的存在,并不表明摄动解中将会出现振幅趋于 ∞ 的那种长周期项。实际上,小分母引起的长周期项的振幅充其量增大到 $\varepsilon^{1/2}$ 的量级,而在天平动区域内($\delta < \varepsilon^{1/2}$),长周期项的振幅却随着 δ 的减小而减小,周期也在缩短,当 $\delta \approx 0$ 时,达到“平衡”(指振幅为零)状态,即平衡点。

以上所有结论都是针对二体共振中的单共振的(临界角问题也属此类),这是一种主要共振现象。另外,还存在多体共振,如木星的Galilean卫星1,2,3之间的三体共振,这同样可采用上述理想共振模型进行讨论,结论也类似。但含有因子 $\cos \tilde{e} = \cos(\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3)$ 的主要共振项($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 分别为三个卫星的平经度),是从消除普通周期项后的哈密顿函数的二阶部分产生,它们是联合摄动项,例如卫星1与卫星2的摄动项和卫星2与卫星3的摄动项的联合项。因此它们的量级不再是 ε ,而是 ε^2 。若仍记 $\delta = (n_1 - 3n_2 + 2n_3)/n_j$, ($j=1, 2, 3$),则三体共振现象对应 $\delta \leq \varepsilon$,而不是 $\delta \leq \varepsilon^{1/2}$ 。这要求相应的 $\delta_1 = (n_1 - 2n_2)/n_2$ 和 $\delta_2 = (n_2 - 2n_3)/n_3$ 的值必须接近。木星的Galilean卫星1,2,3正属于这种情况, $\tilde{e} = \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3$ 在 π 附近作小振动。

至于将理想共振推广到两个自由度(或双共振)的情况^{[84], [85]},目前主要是推广按 $\varepsilon^{1/2}$ 的幂建立无小分母的摄动解的方法,本文不再介绍。

三、对理想共振的进一步分析

获得理想共振模型所略去的项大致有下列四种:

1. 含有因子 $\cos kx$ ($k \geq 2$)的共振项,在第三体摄动中,即 $\cos 2\tilde{e}, \cos 3\tilde{e}, \dots$;
2. 对应空间问题的倾角项($i \neq 0$);
3. 普通周期项;
4. 摄动天体轨道的椭圆项($e_1 \neq 0$)。

尽管理想共振模型考虑了主要项,在一定程度上是合理的,它反映了共振运动的主要特征,为我们了解小分母的出现所反映的力学本质提供了重要信息。但是上述被略去的各项究

竟对共振运动有什么影响?是否会改变由理想共振模型所给出的基本特征?都是需要进一步讨论的。我们曾仔细研究过这一问题^[37],下面分别介绍所得到的一些结论。

1. kx 项的影响

以第三体摄动中的通约问题为例,共振项是以下列形式出现在摄动函数中的,即

$$e^{k|p-q|} \cos k\tilde{e}, \quad k=1,2,\dots$$

这种对应 $k \geq 2$ 的项,并不妨碍把问题简化成一个自由度的共振模型;只是当 e 足够大时,平衡解的个数增加,分布情况起了变化。例如,对于 $q/p=1/2$ (即一阶共振),增加 $e^2 \cos 2\tilde{e}$ 项后,当 $e > 0.23$ 时,其结果如图 4 所示,有两个中心和三个鞍点,否则平衡解的个数和分布与理想共振结果一致。若同时增加 $e^2 \cos 2\tilde{e}$ 和 $e^4 \cos 3\tilde{e}$ 项,则当 $e > 0.37$ 时,结果如图 5 所示,否则亦与理想共振结果相同。由此类推,若再考虑 $e^4 \cos 4\tilde{e}$ 项,要使其结果与理想共振结果有明显差别,则要求 e 更大。而所有 $k\tilde{e}$ 项都同时存在,故实际上,理想共振的基本特征(包括平衡解及其分布状态)不会改变。

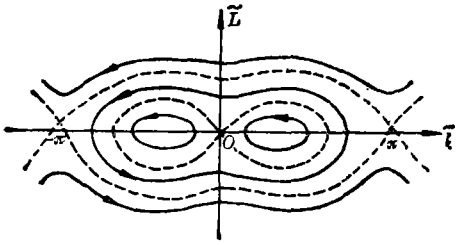


图 4

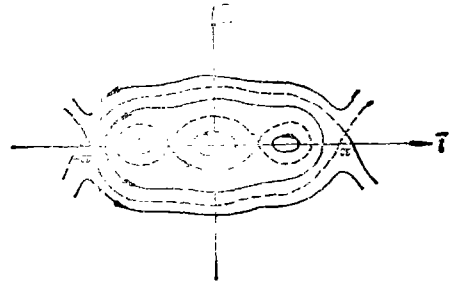


图 5

2. 倾角 i 的影响

与 $k\tilde{e}$ 项类似,在第三体摄动的通约问题中,考虑 $i \neq 0$,亦不会改变理想共振所对应的哈密顿函数的基本形式。又因 i 变化较慢,相应的问题可近似地处理成一个自由度系统。当 $i < 90^\circ$ 时,方程的性质不变,相平面 (x, y) 上的平衡解及其分布状态应与 $i=0$ 时基本一致;严格的计算也证实这一结论。特别要提一下逆行情况,当 $i \approx 180^\circ$ 时,相应的共振项比顺行对应的共振项至少增加一个 e^2 因子;因此,逆行共振效应是微弱的,很容易消失,实际上也很难发现这种状态。在太阳系的小行星带中还没有发现逆行小行星的事实,也许正说明这一点,因为没有扮演稳定角色的强共振效应存在。Everhart 从数值探讨中也发现逆行小行星轨道(假想的)是不规则和不稳定的^[40],这从另一侧面证明了上述结论。

3. 普通周期项的影响

我们在理想共振模型对应的哈密顿函数中加入主要短周期项,经计算表明,它几乎不改变理想共振的各种特征,这一结果是不难理解的。

4. 摄动天体椭圆轨道改正项的影响

对于第三体摄动的通约问题,若考虑 $e_1 \neq 0$,那么,在平均化后的哈密顿函数中将要出现

$$e_1 \cos(\tilde{e} - \beta)$$

等形式的项, 增加了角坐标 $\beta = \beta(\omega, \Omega)$, 而无法再构成一个自由度的共振模型。但在 e_1 不太大、而 ω 和 Ω 的变化又较慢的情况下, 可以在一个共振周期内, 视 β 为常数, 从而构成一个近似的理想共振模型, 于是原结论仍然存在, 只是平衡解的位置将随时间移动, 天平动区域也有相应的改变。这种近似处理的目的是, 在于探求 e_1 项的影响规律。事实上, 当 e_1 不小时, β 又随时间变化, 平衡解的位置和性质都将发生变化, 从而导致共振现象的消失, 严格的计算结果证实了这一点。

上述结论表明, 椭圆项的影响最显著, 这是因为 $e_1 \neq 0$ 时, 摄动有累积效应。

四、研究轨道共振的几种平均模型

前面引用的理想共振模型, 显然是一种最简单的平均模型(为区别起见, 相应的哈密顿函数记作 $\bar{F}^{(1)}$)。尽管它能清晰地反映小分母对应的共振运动的基本特征, 但和实际运动毕竟是有差别的, 特别是上一段所提到的椭圆项($e_1 \neq 0$)的影响。故有必要建立更接近实际运动而又便于探讨长时间间隔运动形态的动力模型, 这当然应该是一种仅消除快变量(或称短周期项)的平均模型。

Schubart 模型就是一种附合上述要求的平均模型, 它是针对限制性三体问题而建立的, 其背景就是太阳系中处于木星轨道附近各通约带的小行星群。对于 $n_1/n = q/p$ 的共振问题, 相应的哈密顿函数 F , 在一个会合周期 T 内的平均值为

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_0^T F dt \quad (13)$$

具体积分时, 是对平近点角 M 或偏近点角 E 进行的, 并将 \bar{F} 记作 $\bar{F}^{(2)}$, 有

$$\bar{F}^{(2)} = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F dM = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} (1 - e \cos E) F dE \quad (14)$$

积分过程中, 除时间根数 M, E, \dots 外, 其余根数均视为常数。利用(14)式给出的积分值和 F 的文字展开式即可得到 $\bar{F}^{(2)}$ 的具体函数形式:

$$\bar{F}^{(2)} = \bar{F}(a, e, i, \Omega, \omega, \varepsilon) \quad (15)$$

若是平面问题, 则有

$$\bar{F}^{(2)} = \bar{F}(a, e, \omega, \varepsilon) \quad (16)$$

(15)和(16)式右端函数 \bar{F} 中还包含摄动天体的根数 a_1, e_1 等。相应的平均模型保留了各种长周期项和共振项, 这显然比理想共振模型更接近真实运动状况, 而且由于消除了快变量 (M 和 M_1), 也便于数值研究, 积分步长可取得较大。

根据 Schubart 模型的平均过程不难看出, 即使用相当精确的数值积分方法来计算 (14) 式, 也只能给出一阶意义(即准到 $O(\varepsilon)$ 项)下的准确结果, 这是因为积分过程中只将时间根数当作变量的缘故。

基于 Schubart 模型在平均化过程中采用的一种近似, 我们也提出一种平均模型, 它是直接将 F 展成 M 和 M_1 的三角级数, 消除快变量 M 和 M_1 , 并丢掉二阶以上各项, 从而得到与 Schubart 模型相当的另一种平均模型, 相应的哈密顿函数记作 $\bar{F}^{(3)}$ 。两种模型的差别在于, 前

者是一种数值逼近,“调整”了 F 展开式中有关项(如 e , e_1)的系数,而后者则采用一种分析展开法,对应项的系数与前者之差别为二阶小量,这本身就是两种平均模型所“舍去”的量。

显然,后两种平均模型不可能使轨道共振问题的研究得到明显的简化;但因它们不包含快变量而便于进行长间隔的数值探讨,这对研究共振运动的演化形态是很有利的,而这正是轨道共振问题研究中的一个重要课题。

五、实际运动与共振态的演化

由理想共振模型给出的轨道共振的基本特征,呈现出一种稳定作用,但在实际运动中到底如何,还有待进一步研究。当然,这需要考察相应的运动在长时间间隔内的趋势(即演化)。引言中曾提到的 Froeschlé 等人的工作,大部分都是探讨这类问题的,但并未很好地与共振特征联系起来,也未得到较系统的结论。因此,有必要用理想共振模型中所得到的有关结论作为选取初始条件的依据,采用更精确的平均模型($\bar{F}^{(2)}$ 或 $\bar{F}^{(3)}$)作长时间间隔的数值探讨。不过先从严格的运动方程着手也是有意义的,尽管这样需要花更多的计算时间,但对深入了解轨道共振演化及其在实际运动中所起的作用,以及证实上述平均模型的合理性,还是很有必要的。

我们分别对太阳系中 70 颗已编号的小行星(对应 $q/p=1/2, 2/3, 3/4, 1/3, 1/4, 2/5, 3/7, 5/9, 2/7$)作了轨道数值计算,积分长度为 10^4 — 10^5 年,主要结果如下^[38]:

1. 若取木星轨道偏心率 $e_1=0$, 则“实际”运动的结果与理想共振给出的结果基本一致。原属于天平动情况的,其主要特征未改变,而且平衡点的位置和天平动的区域亦几乎未变。
2. 若取 $e_1=0.0484$, 则 70 颗小行星中的大部分(包括原属于天平动和循环两种情况)的运动状况与理想共振模型给出的结果几乎一致。但下列几种情况例外(指共振特征消失),即

- (1) 在理想共振模型中处于天平动区域边缘或接近边缘(有时被称为浅振区)的;
- (2) 高阶共振,如对应 $q/p=4/9$ 的小行星 1630, 在 $t-t_0=5100$ 年时,共振现象开始消失。

那些仍然处于天平动区域的运动,其平衡点的位置发生移动,而且移动的状况与第三段中的近似分析结果基本相符。那些在理想共振模型中很接近中心的运动(也称为深振)十分稳定,相应的根数变化也较小;不过随着 e_1 的增大,象这类深振状态也会消失。另外,处于天平动区域边缘的运动(也称为浅振),相应的根数变化较大,其量级可明显地超过 $o(e_1^{1/2})$, 显示出某种不稳定状态。

上述结论清楚地表明,影响共振特征的主要因素是摄动天体的轨道偏心率 e_1 ($e_1 \neq 0$), 而短周期项的影响却可略去。这就证实了要进一步探讨共振态的演化或仔细考察某种因素的影响规律,采用平均模型 $\bar{F}^{(2)}$ 或 $\bar{F}^{(3)}$ 是合理的。

除上述结果外,我们还针对近地卫星的临界角问题和 24 小时同步卫星的 $q/p=1/1$ 通约问题,作了数值探讨。结果表明,临界角对应的共振效应很微弱(因主要共振项 $\cos 2g$ 伴有 e^2 因子),在实际运动中很难出现;而 24 小时同步卫星运动的共振效应比较明显,其位置摆

动(相对地球旋转坐标系中的平衡点)的周期,一般只有几年,但日、月摄动可使其共振特征完全消失^[8,9]。

六、轨道共振研究中的几个课题

根据前面几段的介绍,在轨道共振问题的研究中,显然有下列几个方面是需要进一步探讨的。

1. 对于第三体摄动中的通约问题,摄动天体轨道偏心率 e_1 项的影响,有待进一步的系统研究。我们认为,应在理想共振模型的基础上合理地选择适当的初始条件,再利用较准确的平均模型进行数值探讨,以搞清在不同状况下 e_1 项的影响,以及同一初始状况下共振运动随 e_1 的变化规律。

2. 进一步将不变曲线(截面法)、周期解的稳定性(特征指数)等方面的研究与共振状态密切联系起来,以搞清不同角度得到的结论之间的关系,从而更深入地了解共振运动的变化规律。

3. 第四体的摄动影响,这对研究偏心率较大的小行星轨道的演变是有一定意义的。

4. 上述研究都是对应引力作用的。为了使轨道共振研究更接近真实背景,有必要考虑非引力因素,如耗散因素等。

这些研究,对于理想共振模型而言,都带有动力系统的“结构”稳定性的含义,因此,对解释太阳系中 Kirkwood 空隙是有益的。

参 考 文 献

- [1] Brouwer, D., *Astron. J.*, 64 (1959), 378-397.
- [2] Hori, G., *Publ. Astron. Soc. Japan*, 18(1966), 287-296.
- [3] Deprit, A., *Celest. Mech.*, 1 (1969), 12-30.
- [4] Арнольд, В. И., *Учен. Мат. Наук*, 18 (1963), B.6, 91-192.
- [5] Garfinkel, B., *Astron. J.*, 71 (1966), 657-669.
- [6] Poincare, M. H., *Bull. Astron.*, 19 (1902), 289-310.
- [7] Schubart, J., *SAO Special Report*, 149, (1964).
- [8] Schubart, J., in *The Theory of Orbits in the Solar System and in Stellar System*, 187-193, ed. by G. Contopoulos, (1966).
- [9] Schubart, J., *Astron. J.*, 73 (1968), 99-103.
- [10] Schubart, J., in *Dynamics of Planets and Satellites and Theory of Their Motion*, 137-143 ed. by V. Szebehely, (1978).
- [11] Froeschlé, C. and Scholl, H., *Astron. Astrophys.*, 48 (1976), 389-393.
- [12] Froeschlé, C. and Scholl, H., *Astron. Astrophys.*, 57 (1977), 33-39.
- [13] Froeschlé, C. and Scholl, H., *Astron. Astrophys.*, 72 (1979), 246-255.
- [14] Greenberg, R., *Icarus*, 33 (1978), 62-73.
- [15] Greenberg, R. and Scholl, H., in *Asteroids*, 310-333, ed. by T. Gehrels, University of Arizona, Tucson, (1979).
- [16] Heppenheimer, T. A., *Astron. J.*, 80 (1975), 463-472.
- [17] Heppenheimer, T. A., *Icarus*, 41 (1980), 76-88.
- [18] Heppenheimer, T. A., *Celest. Mech.*, 22 (1980), 297-304.

- [19] Wisdom, J., *Astron. J.*, **87** (1982), 577-593.
 [20] Franklin, F. A., Marsden, B. G., Williams, J. G. and Bardwell, C. M., *Astron. J.*, **80** (1975), 729-746.
 [21] Jeffreys, W. H., *Astron. J.*, **72** (1967), 872-875.
 [22] Schweizer, F., *Astron. J.*, **74** (1969), 779-783.
 [23] Wiesel, W. E., *Celest. Mech.*, **13** (1976), 3-37.
 [24] Heppenheimer, T. A., *Icarus*, **26** (1975), 367-376.
 [25] Heppenheimer, T. A., *Astron. Astrophys.*, **70** (1978), 457-467.
 [26] Lissauer, J. J., *Astron. J.*, **87** (1982), 1051-1058.
 [27] 章圣泮, 刘林, *天文学报*, **23** (1982), 185-197.
 [28] Pauwels, T., *Celest. Mech.*, **30** (1983), 229-247.
 [29] Ferraz-Mello, S., *Dynamics of the Galilean Satellites*, (1979).
 [30] Hori, G., *Astron. J.*, **65** (1960), 291-300.
 [31] 刘林, 赵德滋, *南京大学学报(自然科学版)*, (1980), No.3, 56-62.
 [32] Henrard, J., *Celest. Mech.*, **27** (1982), 3-22.
 [33] Henrard, J., *Celest. Mech.*, **30** (1983), 198-218.
 [34] Moore, P., *Celest. Mech.*, **30** (1983), 31-47.
 [35] Moore, P., *Celest. Mech.*, **33** (1984), 49-69.
 [36] Liu, L., Innanen, K. A. and Zhang, S.-P., *Astron. J.*, **90** (1985), 877-886.
 [37] Liu, L. and Innanen, K. A., *Astron. J.*, **90** (1985), 887-891.
 [38] Liu, L. and Innanen, K. A., *Astron. J.*, **90** (1985), 1906-1909.
 [39] 刘林, Innanen, K. A., *天文学报*, **27** (1986).
 [40] Everhart, E., in *Asteroids*, 288, ed. by T. Gehrels, University of Arizona, Tucson, (1979).
 [41] Siegel, C. L. and Moser, J. K., in *Lectures on Celestial Mechanics*, 208-209, (1971).

(责任编辑 林一梅)

Orbital Resonance

Liu Lin

(Department of Astronomy, Nanjing University)

Abstract

In this paper, a rounded study of orbital resonance in celestial mechanics is expounded. First, the meaning of orbital resonance and some of the relevant phenomena are mentioned. Then several dynamical models and methods for studying orbital resonance as well as the main results obtained by these models and methods are enunciated. Last but not least, the paper suggests that some aspects in the study of orbital resonance still await further attention.