人卫运动理论及其应用(Ⅰ)

刘　林　朱文耀　黄　珹
(南京大学天文系)　(中国科学院上海天文台)

提　　要

本文主要围绕人卫定轨问题阐述运动理论中的动力模型，摄动项的取舍、运动方程的各种解法和与其有关的一些定性研究结果以及有待进一步深入研究的问题。

一、引　言

人造卫星在绕地球运行过程中，除受地球"非球形"部分（即由形状不规则和密度不均匀而导致的对密度均匀球体的修正)的影响外，还要受到地球周围环境中各种力学因素的摄动，如大气引起的气动力，日、月引力，太阳辐射压(简称光压)和地球的反照辐射压，太阳和月球引起的地球潮汐形变以及广义相对论效应等。对于在200公里以上高空飞行的面质比不太大的卫星，其轨道主要受地球中心引力所支配，各种摄动因素相对这一引力而言为一小量，它们的量级不超过10^{-3}。因此，人卫绕地球运动的微分方程通常可表为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=F_0(\boldsymbol{r})+\sum_{k=1}^{n}F_k(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon^k), \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{r}$是人卫的地心向径，为一三维向量，$\dot{\boldsymbol{r}}$是$\boldsymbol{r}$对时间t求导。方程(1)右端第一大项是地球中心引力项，F_0与F_k也都是三维向量，ε是小参数。尽管方程(1)对应的是一复杂的非线性动力系统，在一般情况下它是无法求解的。但它有一特点，即当小参数$\varepsilon=0$时，系统(1)退化为下列可积系统：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=F_0(\boldsymbol{r}), \tag{2}$$

相应的解是一不变椭圆。而当$\varepsilon\neq0$时，方程(1)右端的第二大项(即摄动项)为一小量，可写成如下形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=F_0(\boldsymbol{r})+F_\varepsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon),\qquad |F_\varepsilon|/|F_0|=O(\varepsilon). \tag{3}$$

此时，系统(3)可由(2)的解作为基本解构成一个小参数摄动系统，这不能不说是给非线性方程(1)的求解带来一线希望。当$\varepsilon\ll1$时，方程(2)的解就可以刻划人卫运动的基本规律，而对方程(3)作简单的处理，即可在上述基础上获得人卫轨道的变化规律。

人卫运动理论的主要内容就是研究在各种摄动力作用下卫星轨道的变化规律，并给出定量解，以满足各种实际工作的需要。

虽然各种力学因素对人卫运动的影响使问题复杂化，但正因为这些影响显著，人们就可以利用这些影响与人卫轨道变化之间的关系，反过来测定上述各力学因素的有关参数，如地球引力场参数等。

1987年9月24日收到。

本文将围绕人卫轨道变化这一主题，着重阐述有关理论和方法，下篇文章将继续介绍运动理论的各种应用。

二、动力模型

在人卫工作中，由于不同的需要，坐标系的取法各不相同。为了便于叙述，我们就取地心惯性坐标系作为讨论问题的参考系。在此坐标系中，我们来仔细分析基本方程(1)右端的摄动项$\boldsymbol{F}_k$，以给出某一具体问题所对应的动力模型。

1．地球形状摄动

如果地球作为一个刚体，其引力位函数展开式在地心球坐标系(r,φ,λ)中可简单地写成下列形式[1]：

$$V=\frac{GE}{r}\left\{1-\sum_n J_n\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)-\sum_n\sum_m J_{n,m}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n^m(\sin\varphi)\cos m\bar{\lambda}\right\} \tag{4}$$

$$\bar{\lambda}=\lambda-\lambda_{n,m},\qquad m\lambda_{n,m}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{B_{n,m}}{A_{n,m}}. \tag{5}$$

其中$J_2=O(10^{-3})$，相应的项称为扁率项，而其他J_n和$J_{n,m}$的量级几乎都不大于10^{-6}。上述各项对卫星轨道的影响，简称为地球形状摄动。展开式(4)的收敛速度很慢，它给计算形状摄动带来一定的麻烦。

2．地球形变摄动

地球并非刚体，由于日、月引力作用以及地球本身自转的离心力作用，将导致地球的弹性形变[2-3]，前者就是潮汐现象，有固体潮、海潮和大气潮。因大气总质量相对较小，大气潮效应只相当于固体潮效应的2.5%，故通常是将它并入前两种潮汐中考虑。上述形变都将改变地球引力位，即引起J_n和$J_{n,m}$的变化，从而对人卫运动产生一种附加摄动。有关表达式见文[2-3]。

3．大气阻力与类阻力摄动

人卫(特别是近地卫星)在大气层中飞行，将受大气阻力的影响。另外，还有电离气体的磁阻力等不太清楚的“类阻力”作用[4]，它可并入上述阻力项中，只要将阻力系数C_D和相应的有效截面积S作适当的处理即可(见文[1]第四章)。大气阻力加速度可写成下列形式：

$$D=-\frac{1}{2}\frac{C_D S}{m}\rho v^2\frac{\boldsymbol{v}}{|v|}. \tag{6}$$

其中$\boldsymbol{v}$是卫星相对大气的飞行速度(三维向量)，ρ即大气密度。阻力系数C_D，卫星面质比S/m和大气密度$\rho=\rho(r,t)$正是计算大气阻力摄动时的三个难以确定的参数，它们是当前要提高近地卫星定轨和预报精度的关键所在。

4．日、月引力摄动

人卫绕地球运动时将受到日、月引力的摄动作用，相应的摄动加速度向量为

$$A_C=\sum_{j=1}^{2}(-Gm_j)\left(\frac{\boldsymbol{R}_j}{|R_j|^3}+\frac{\Delta_j}{|\Delta_j|^3}\right), \tag{7}$$

$$\Delta_j=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_j\quad(j=1,2). \tag{8}$$

其中$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{R}_j$各为人卫和日、月的地心向径，R_j是时间t的已知函数，由日、地、月三体系统

确定，与人卫运动无关。

5. 地球扁率的间接摄动

事实上，地球并非质点，如果看成扁球体，它与月球之间的相互作用要增加两项：一是力矩作用引起的岁差章动现象，这是在前面选取的惯性参考系中计算地球引力位时所要考虑的，见文[1]第七章；另一项就是月球与地球扁率部分的相互作用引起的平动加速度，对惯性参考系而言增加一惯性力，此即地球扁率的间接摄动，其表达式与地球形状摄动中的扁率项很类似。

上述扁率间接摄动对太阳而言亦存在，但太小，目前还不必考虑。

6. 月球扁率摄动

月球的扁率还是较大的，量级为10^{-4}，它对地球(作为质点)和人卫的作用之"差"即通常所说的月球扁率摄动，或称月球形状摄动。

7. 太阳辐射压摄动

直接作用在人造卫星表面的太阳辐射压要影响卫星的运动，相应的摄动加速度向量为

$$A_r=\gamma\rho_\odot C_r\left(\frac{S}{m}\right)a_u\,\frac{\Delta}{|\Delta|^3}, \tag{9}$$

其中$\rho_\odot$是作用在离太阳一个天文单位a_u处的太阳辐射压强；C_r是卫星表面的反射系数；S/m是卫星的有效面质比，与阻力公式(6)中的面质比不相同；Δ是太阳到卫星的矢径(三维向量)；γ是地影因子，由下式定义：

$$\gamma=1-\Delta S/S_\odot, \tag{10}$$

其中$S_\odot$是太阳视面积，ΔS是被蚀部分。因此，计算γ就涉及到地影模型。在一般工作中，处理成简单的柱形阴影模型，见文[1]第五章；更复杂的模型见文[5]。

8. 地球反照辐射压摄动

地球受太阳直接辐射后，其本身会产生次辐射，这有两类：一是光学辐射，亦称反照率辐射[6]；另一类是红外辐射，又称发射率辐射[7]。这两类性质不同的次辐射对人卫运动的影响与光压摄动类似[6-7]，统称地球反照辐射压摄动。

9. 广义相对论效应

考虑广义相对论效应，地心惯性坐标系只是一个局部惯性参考系，在此参考系中，人卫的运动方程不同于牛顿引力场中的形式，其差别就相当于人卫运动受到一个附加摄动。这种效应来源于地球引力场，其他天体引力场的相对论效应较小[8]，都不必考虑。因此，据文[9]的结果，上述效应引起的后牛顿摄动加速度向量可写成

$$A_{rel}=\frac{GE}{|r|^2}\left[\frac{\boldsymbol{r}}{|r|}\left(\frac{4}{c^2}\frac{GE}{|r|}-\frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{c^2}\right)+\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|r|}\left(\frac{4}{c^2}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})\right)\right], \tag{11}$$

其中c为光速。

10. 小推力摄动

有些卫星入轨后，需要不断调姿和修正轨道，常在某一段时间内点火喷气，产生一种小推力，其影响即称小推力摄动。其处理方法与大气阻力摄动类似，但要简单些，因为它不涉及那些难以确定的参数。

综上所述，人卫运动的基本方程(1)可写成

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\sum_{k=0}^{n}F_k(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon^k), \tag{12}$$

$$F_0=-GE\frac{\boldsymbol{r}}{|r|^3},\tag{13}$$

$F_k(k=1,2,\cdots)$即各种摄动力。对于一个具体问题，当精度要求(记为δ)给定后，可用简单的估计方法来确定哪些摄动因素应该考虑。假定某一摄动力F_k与中心引力F_0的相对大小(即摄动量级)为

$$|F_k|\ /\ |F_0|=\chi\tag{14}$$

若F_k为保守力，则当

$$2\chi(n\Delta t)\geqslant\delta\tag{15}$$

时必须考虑；而若F_k为耗散力，则当

$$\frac{3}{2}\chi(n\Delta t)^2\geqslant\delta\tag{16}$$

时就必须考虑。以上$n\Delta t$是卫星运动所经历的弧长。

对于一般的近地卫星，最大的摄动力就是J_2项，相应的$\chi=O(10^{-3})$，而其他因素的摄动量级都不超过10^{-6}。至于24^h同步卫星，它是远地卫星，J_2项的摄动量级下降到0.7×10^{-4}，而日、月引力的摄动量级却上升到10^{-5}。至于大气阻力和光压的摄动量级，还取决于卫星的面质比。而后牛顿效应对上述两类卫星的摄动量级皆为10^{-9}。

三、人卫轨道变化的定量研究

由于基本方程(1)的复杂性，要严格给出人卫轨道解是不可能的，只能在一定精度要求下，用分析方法给出小参数幂级数解(同时可揭示人卫轨道变化的基本规律)，或用数值方法给出轨道的离散解。

1. 分析方法

无摄运动方程(2)的解可写成下列形式：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\sigma},t),\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\sigma},t)\tag{17}$$

其中$\boldsymbol{\sigma}$是积分常数，即6维常向量，通常用6个椭圆轨道根数表示其元素。考虑有摄运动方程(3)时，假定其解的形式仍为(17)，则$\boldsymbol{\sigma}$不再是常向量，用常数变易法可得

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}=0,\tag{18}$$

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}=F_s.\tag{19}$$

由此解出$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$，它仅与摄动项有关，即

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{f}_s(\boldsymbol{\sigma},t;\varepsilon),\tag{20}$$

此即描述人卫轨道变化的摄动运动方程。

常用于求解形如(20)的小参数方程的方法有摄动法和平均法，它们的原理都很简单，也很直观。

对于摄动法，解是表示为小参数ε的幂级数：

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\boldsymbol{\sigma}^{(0)}(t)+\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(t,\varepsilon)+\cdots+\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(l)}(t,\varepsilon^l)+\cdots.\tag{21}$$

其中$\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$即无摄运动解，作为有摄运动的参考解；$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$是各阶摄动，分别含有因子$\varepsilon^k$，$k=1$，

$2,\cdots,l\cdots$. 将方程(20)两端对参考解$\boldsymbol{\sigma}^{(0)}(t)$展开并比较，即得

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)}(t)=\boldsymbol{\sigma}(t_0), \tag{22}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(1)}=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}_{\varepsilon}dt, \quad \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(2)}=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\varepsilon}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)_{\sigma(0)}\cdot\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(1)}dt, \cdots. \tag{23}$$

对于参考解$\sigma^{(0)}(t)$，如果平近点角M是所采用的根数之一，则$M^{(0)}(t)$中还含零阶长期项$n^{(0)}\cdot(t-t_0)$，n是卫星平运动速度。根据(23)式导出$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$的表达式并无原则性困难，只是愈到高阶愈麻烦。在一定条件下，级数解(21)的收敛范围是 $n(t-t_0)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$[10]。

由于参考解用了无摄运动解$\boldsymbol{\sigma}^{(0)}(t)$，致使摄动解$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$中出现形如$[\varepsilon n(t-t_0)]^k$的长期项，实际上它可能是一种周期项的级数表达形式。那么，当$n(t-t_0)$较大时，要使解满足一定精度，取项必然较多，用起来极为不便。对于人卫而言，一天绕地球转10多圈，即使计算几天的轨道变化，相应的$n(t-t_0)$也相当大。因此，在人卫轨道计算中，很少采用摄动法给出的轨道解。

如果摄动力是保守力，那么，在一定条件下[11]，用平均法可改变级数解中长期项的结构，使其以$n(t-t_0)$的线性形式出现，即$\varepsilon^k n(t-t_0)$。如何构造级数解，通常有两类方法：平均根数法和变换方法。

关于第一类方法，它是在摄动法的基础上将$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$分解成长期项和周期项(由快变量$M$构成的短周期项$\boldsymbol{\sigma}_s^{(k)}(t)$和由慢变量$\omega,\Omega$构成的长周期项$\boldsymbol{\sigma}_l^{(k)}(t)$，这里$M,\omega,\Omega$均为常用的椭圆轨道根数)，参考解$\boldsymbol{\sigma}^{(0)}(t)$改用平均根数$\overline{\boldsymbol{\sigma}}(t)$：

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}(t)=\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}}(t)+(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2+\cdots)(t-t_0), \tag{24}$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}}(t)=\boldsymbol{\sigma}(t_0)-[\boldsymbol{\sigma}_l^{(1)}(t_0)+\boldsymbol{\sigma}_l^{(2)}(t_0)+\cdots+\boldsymbol{\sigma}_s^{(1)}(t_0)+\boldsymbol{\sigma}_s^{(2)}(t_0)+\cdots]. \tag{25}$$

具体过程与摄动法构造级数解(21)—(23)类似，只是展开的“零点”$\boldsymbol{\sigma}^{(0)}(t)$改为$\overline{\sigma}(t)$，它所包含的各阶长期项系数$\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\cdots$，在构造级数解的过程中形成。相应的解$\boldsymbol{\sigma}(t)$表为下列形式：

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\overline{\boldsymbol{\sigma}}(t)+\boldsymbol{\sigma}_l^{(1)}(t)+\cdots+\boldsymbol{\sigma}_s^{(1)}(t)+\cdots. \tag{26}$$

第二类方法统称变换方法，其构造级数解的过程较之第一类方法抽象些，但并不复杂。若记

$$\sigma=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}, \tag{27}$$

$\boldsymbol{X}$是矩，即a,e,i三个根数，$\boldsymbol{x}$是角变量，即M,ω,Ω三个根数；或用 Delaunay变量，$\boldsymbol{X}$即L,G,H，$\boldsymbol{x}$即l,g,h。对于保守力，在一定条件下[13]，可找到变换φ(显式或隐式)，

$$\varphi:\boldsymbol{\sigma}\to\boldsymbol{\sigma}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix} \tag{28}$$

使得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*=\boldsymbol{f}_{\varepsilon}^*=\sum_{k=0}^{l}\boldsymbol{f}_k^*(\boldsymbol{Y},\varepsilon^k)+\sum_{k>l+1}\boldsymbol{f}_k^*(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{y},t;\ \varepsilon^k) \tag{29}$$

且$\boldsymbol{f}_k^*(\boldsymbol{Y},\varepsilon^k)$的前三个分量为$O$，则准到$O(\varepsilon^l)$有解：

$$\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{Y}_0,\ \ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{y}_0+\left[\sum_{k=0}^{l}\boldsymbol{f}_k^*(\boldsymbol{Y}_0,\varepsilon^k)\right](t-t_0). \tag{30}$$

通过变换φ消除角变量$\boldsymbol{x}$，即分离出各种周期项。新变量$\boldsymbol{\sigma}^*$只存在长期变化，它就是前面定

义的平均根数$\overline{\sigma}(t)$，而新老变量之间的差别$\sigma-\sigma^*$即各种周期项。因此，变换方法和平均根数法本质上无明显差别，但变换方法比较简单。Brouwer首先采用了Zeipel变换[14]，它是一种隐函数定义的正则变换，Hori和Deprit利用Lie级数给出了一种由显函数定义的正则变换[15-17]，Kamel将这种Lie变换推广为非正则形式，但Lie变换的运算过程较复杂，1982年我们给出了一类原理极其简单的非正则形式变换方法，有隐式和显式两种[13]，使整个变换方法得以完善。

如果考虑耗散力(大气阻力就是)，只要这类摄动力的量级明显小于地球引力场的J_2项，那么由其引起的长期项的复杂性还不至于影响整个解的构造，见文[1]第四章。

分析方法在人卫运动理论和应用等方面都起过相当重要的作用：改进并发展了小参数运动方程的解法；揭示了人卫轨道变化的基本规律(如在地球引力和大气阻力的作用下，卫星轨道基本上是一个不断变小变圆的旋转椭圆)，各种摄动力引起卫星轨道的变化形式与范围都可用近似解清楚地给以表达，这为卫星轨道设计和卫星跟踪提供了必要的依据；在一般精度(如地面定位精度100米)要求下，一阶近似分析解既简单又方便。但随着卫星定轨精度要求的提高(如动力测地等工作)，需要二阶或更高阶近似解；尽管这没有原则性困难，可这种解的项数太多，即使导出全部公式[19-21]，用起来也极不方便，更何况对某些摄动因素还无法给出便于分析方法求解的精确数学模型(如大气等)。因此，从实用角度看，数值方法显得愈来愈重要。至于分析方法，也有一些工作试图寻找某种包含较多摄动项的中间轨道来代替椭圆轨道作为参考解，以改变分析解公式的冗长状态。例如包含完整J_2项的Vinti型[22]和包含全部J_2，J_3和大部分J_4项的Аксенов型[23]，[22]，但经具体分析和试算表明：目前所给出的中间轨道，都不能摆脱上述困境[24]。

2．数值方法

人卫运动方程就是一般的非线性常微分方程组，原则上一些比较成熟的数值方法[26]都可用来给出相应的离散解。但有些工作针对人卫运动的特点，对已有方法作了适当改进，给出了一些更合适的方法[26-27]。

在人卫定轨工作中，对数值方法的选择，主要参看下述几个方面：

(1) 稳定性　由于人卫轨道计算涉及的“时间”间隔都不太短，因此，初值误差、局部截断误差和舍入误差在计算过程中是否会“恶性”膨胀，至关重要，此即数值稳定性问题。而人卫轨道解是Liapunov不稳定(即运动不稳定)的，那么上述误差的失控现象是不可避免的(表现在沿运动方向上)，任何一种数值方法都不可能改变这一运动本质。但相对稳定性是可以保证的，即数值方法本身所造成的误差累积程度不超过运动本身不稳定性所引起的误差累积。目前一些方法(多步法和单步法)，只要取适当的步长和阶数，都可以达到这一要求。当然，也可借助某些力学条件来约束沿迹误差的膨胀，例如利用能量积分或其变化[28-29]，此即稳定化措施。

(2) 精度问题　当前的计算机完全可以满足人卫轨道计算对字长的要求，精度问题在于方法本身。通常是低精度用低阶方法，而高精度用高阶方法，致使步长适中。对于轨道偏心率不太小的情况，以采用自动变步长的方法为好，当然，这给多步法带来一些不便，而对单步法很易实现。至于全局误差的估计问题，至今仍未解决。对于人卫轨道计算，基本上可按$\delta N^{3/2}$来估计，δ是局部误差，N是积分步数。只要计算机有足够的字长，那么局部误差δ主要取决于截断误差，它可由变阶或变步长的方法给出其估计值。RKF方法[30]就是用不同阶的

嵌套方法给出局部截断误差估计，以此来调节积分步长。

(3) 速度问题　在稳定性和精度保证的前提下，当然要考虑计算速度问题，这不仅涉及到机时的耗费，而且关系到一项研究工作的周期长短甚至能否实现的问题，不能忽视。如何去选择方法？通常要看方程右端函数的情况，如果简单(像N体问题，N不大时)，用RKF方法显然是可行的[31]，而在人卫精密定轨中，相应方程的右函数极其复杂，采用某种改进的多步法是很自然的，如KSG积分法[27]，它与Cowell方法很类似。

(4) 使用的容易性　一个数值方法要在机器上顺利实现，就必须考虑机外编制程序耗费的人力和时间以及能否适应各种情况(即能否作些微小的改变)。

最后说明一点，关于变量的选择问题：坐标还是根数？后者变化慢，积分步长可取长些，但相应的右函数复杂，特别是精密定轨问题，经比较，还是采用坐标为准。

3．半分析半数值方法

如何将分析方法的优点用于数值方法来增大积分步长，以提高计算速度，这便出现了半分析半数值方法，像文[32]就是一例。这类方法的基本特点是将影响积分步长增大的主要项(高频项)分离出去，对人卫而言，就是J_2摄动引起的一阶短周期项。但分离后步长并没有明显的增大(从局部截断误差的估计式中可以看出)，除非将高阶短周期项亦分离掉，但这将使相应的右函数复杂化，失去了数值方法的优点。因此，只要机器条件允许，在解决一个有高精度要求的实际问题时，还是采用适当的数值方法为宜。

四、奇点问题

分析方法中幂级数解能否构成，将会受到各种“奇点”的影响。其中碰撞奇点是运动的本质奇点，但对人卫运动而言并无实际意义。另一类奇点将会引起小分母问题，致使级数解失效，它们是小e小i问题和临界角、通约问题。

1．小e小i问题

在方程$\dot{\omega}$,$\dot{M}$和$\dot{\Omega}$的右函数中含有$1/e$或$1/\sin i$因子，致使级数解表达式中出现含$\left(\frac{\varepsilon}{e}\right)^k$或$\left(\frac{\varepsilon}{\sin i}\right)^k$因子的周期项，当$e$和$\sin i$的量级接近或低于小参数$\varepsilon$的量级时，相应的级数解显然失效。这一现象的几何背景是很清楚的：当$e=0$时，ω和M变得不确定，而当$\sin i=0$时(即$i=0$或180°)，Ω和ω随之不确定。反应在数学上即上述小分母。显然，这仅仅是轨道的几何描述问题，圆轨道和赤道轨道本身仍然是有确定意义的，只要另选变量代替上述有关椭圆根数即可消除小分母[1]。

2．临界倾角和通约问题

在级数解表达式的长周期项中还会出现$1/(4-5\sin^2 i)$和$1/(qn-pn_1)$这两种因子，前者由J_2摄动引起，而后者由田谐($J_{n,m}$)摄动引起，其中n_1是地球自转角速度，q、p是两正整数。当$i=i_c=63°26'$，$116°34'$或$n/n_1=n_c/n_1=p/q$时，即出现另一类小分母，前者称为临界角问题，后者即通约问题。与小e小i问题不同，它们并非运动方程右函数中所固有的“奇点”，而是由所采用的展开方法带来的现象。但是，这有它的力学背景，此即轨道共振现象[33-35]，它有独特的天平动(Libration)特征：如$i\approx i_c$，卫星轨道的近地点指向不变或在90°附近摆动；24^h

同步卫星(对应$q=p=1$)也有类似的空间定点现象。天平动区域的“宽度”为$O(\varepsilon^{1/2})$，前者的宽度指$\Delta i=i-i_c$，后者是$\Delta n/n=(n-n_c)/n$。这类“奇点”同样不是方程的实质性奇点，当$|\Delta i|>O(\varepsilon^{1/2})$或$|\Delta n/n|>O(\varepsilon^{1/2})$时，$\varepsilon$幂级数解仍能构成；否则，只要改变展开方法，如按$\varepsilon^{1/2}$的幂展开即可消除上述奇点[36]。但按$\varepsilon^{1/2}$展开的结果会使级数解的结构中出现椭圆函数，使用极为不便。我们曾给出一个便于应用的无奇点摄动计算方法[37]，可适用于任何e, i和不同周期的轨道。

五、多点定轨问题

要计算任一时刻卫星的空间位置，或利用卫星轨道变化去测定某些地球物理参数，都需要知道某一历元的准确轨道根数。当掌握了轨道变化规律后，就可由大量观测资料（即定轨条件)来确定它，此即多点定轨，或称轨道改进。由于影响卫星轨道变化的某些力学参数也并不清楚，或不够准确，如大气的有关参数等，因此，往往在定轨的同时来确定这些待定参数。这一问题的完整提法是：

设$\boldsymbol{x}$(n维向量)和$\boldsymbol{y}$(m维向量)分别表示状态量(即待估量：根数$\boldsymbol{\sigma}$和参数$\boldsymbol{p}$)和观测量(如方向、距离、视向速度等)，要利用t_0时刻的验前估计和方差$\hat{\boldsymbol{x}}_{0/0}$, $\boldsymbol{P}_{0/0}$以及一列观测量$\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_s$(对应时刻$t_1,t_2,\cdots,t_s$)来求得$t_k(t_0\leqslant t_k\leqslant t_s)$时刻状态量$x_k$的最小二乘估计$\hat{\boldsymbol{x}}_{k/s}$。

该问题的状态方程和测量方程为

$$\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_k,t_j), \tag{31}$$

$$j=1,2,\cdots,s.$$

$$\boldsymbol{y}_j=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_j,t_j)+\boldsymbol{V}_j, \tag{32}$$

其中$\boldsymbol{V}_j$(m维向量)为测量噪声。将(31)式代入(32)式并经线性化即给出条件方程：

$$\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_{k/s},t_j)=B(\hat{\boldsymbol{x}}_{k/s},t_j)(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_{k/s})+\boldsymbol{V}_j, \tag{33}$$

$$B=\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}_j}\ \frac{\partial \boldsymbol{x}_j}{\partial \boldsymbol{x}_k}, \tag{34}$$

(33)式可用迭代法求解[38-41]。如果要充分利用大量观测资料的统计特性，那么$\boldsymbol{V}_j$应满足某种分布[42]，甚至还应在方程(31)的右端计入模型误差，但这很困难。关于(31)式状态量转移($\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{x}_j$)的计算，就是前面所介绍的轨道变化的计算，用分析方法或数值方法；而矩阵B的形式可以简化，请见文[1]的第十章和文[39—40]。

六、结　束　语

从1957年第一颗人造卫星上天以来，至今已有30年的历史，人卫运动理论也已基本完善，进一步的研究主要是动力模型的精化（特别是地球引力场模型、大气密度分布及其有关问题等)和定量方法如何适应高精度及大批资料快速处理的要求。在此基础上可以更好地开展各种应用研究。当然，关于分析方法中的某些问题还有待深入研究，其结果将会对非线性力学的发展产生影响。

参 考 文 献

[1] 刘林，赵德滋，《人造地球卫星轨道理论》(1977),第三章，南京大学出版社,(1979).
[2] Melbourne, W. et al., MERIT Standards, Third Draft, (1983).
[3] Lambeck, K., The Earth's Variable Rotation, Combridge University Press, (1980).
[4] Rubincom, D. P., *Celest. Mech.*, **26** (1982), 361.
[5] Haley, D., EG&G Report 008-73, (1973).
[6] Sehnal, L., *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, **30** (1979), 199.
[7] Sehnal, L., *Celest. Mech.*, **25** (1981), 169.
[8] Ashby, N. and Bertotti, B., *Phys. Rev. Letts*, **52** (7), 1984, 485.
[9] Dallas, S. S., *Celest. Mech.*, **15** (1977), 111.
[10] 易照华，孙义燧，《摄动理论》，第三章，科学出版社，(1981).
[11] 刘林，卫星测轨和高层大气研究，(1982), No. 1, 7.
[12] Kozai, Y., *Astron. J.*, **64** (1959), 367.
[13] 刘林，章圣泮，中国科学，(1983), No. 5, 455.
[14] Bouwer, D., *Astron. J.*, **64** (1959), 378.
[15] Hori, G., *Publ. Astron. Soc. Japan*, **18** (1966), 287.
[16] Deprit, A., *Celest. Mech.*, **1** (1969), 12.
[17] Deprit, A., and Rom, A., *Celest. Mech.*, **2** (1970), 166.
[18] Kamel, A. A., *Celest. Mech.*, **3** (1970), 90.
[19] 刘林，天文学报，**20** (1979), 349。
[20] Kinoshita, H., SAO, *Spec. Rep.*, 379 (1977).
[21] 刘林，赵德滋，中国科学，(1980), No. 11, 1066.
[22] Аксенов, Е. П., Гребеников, Е. А. и Демин, В. Г., *А. Ж.*, **40** (1963), 363.
[23] Vinti, J. P., *J. Research NBS*, 63B (1959), 105.
[24] 张效愚，刘林，南京大学学报(自然科学版),(1987), No. 3.
[25] 南京大学数学系计算数学专业编，常微分方程数值解法，科学出版社，(1979),
[26] Merson, R. H., RAE Tech. Rep., 74184(1974).
[27] Lundberg, J. B., IASOM TR 81-1, April, 1981.
[28] 黄天衣，丁华，天文学报，**22** (1981), 328。
[29] 刘林，廖新浩，天文学报，**28** (1987), 193.
[30] Fehlberg, E., NASA TR R-287 (1968).
[31] Fox K., *Celest. Mech.*, **33** (1984), 127.
[32] 吴连大，王昌彬，童传，天文学报，**19** (1978), 131。
[33] Liu, L., Innanen, K. A. and Zhang, S. P., *A. J.*, **90** (1985), 877.
[34] 刘林，Innanen, K. A., 天文学报，**27** (1986), 1.
[35] 刘林，天文学进展，**4** (1986), 43。
[36] Garfinkel, B., A. J., **71** (1966), 657.
[37] 刘林，天文学报，**16** (1975), 65.
[38] Tapley, B. D., Proceedings of NATO Advanced Study Institute in Dynamical Astronomy, 1973, 396.
[39] 朱文耀，程宗颐，天文学报，**26** (1985), 13。
[40] 刘林，飞行器测控技术，(1985), No. 3, 6.
[41] 黄珹，何妙福等，中国科学(A辑),(1986), No. 6, 629.
[42] 贾沛璋，朱征桃，最优估计及其应用，科学出版社，(1984).

（责任编辑　刘金铭）

Satellite Orbit-motion Theories and Their Applications (I)

Liu Lin
(*Department of Astronomy, Nanjing University*)
Zhu Wenyao Huang Cheng
(*Shanghai Observatory, Academia Sinica*)

Abstract

This paper is a short review of the orbital theories of artificial satellites. The dynamical models and the criterion of choosing perturbation terms have been given. Various solutions of the motion equation and some related results of the qualitative analysis for satellite orbits have been discussed. In order to improve the accuracy of the orbital determination, some problems remained to be solved have been presented.