第8卷 第3期
1990年9月

天文学进展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol. 8 No. 3
Sep., 1990

各种精密星历数值积分方法间的比较*

黄天衣

（南京大学天文系）

提　　要

本文对常用的数值方法（Adams、Cowell、RKF、GBS、Everhart、Taylor和Krogh方法）就四个主要指标(局部截断误差、数值稳定性、复杂性和普适性)进行评述和比较，并提出一些初步的结论供数值积分工作参考。

一、方　　法

本文只讨论能用于建立精密星历表的数值积分方法，没有涉及星团、星系团及动力体系数值探索中所使用的一些低阶的只用于定性研究轨道统计特征的数值方法。

目前在国际天体力学和天文动力学中广为使用的主要数值积分方法为以下几种(可参阅评述文章[1]和[2])。

1. Adams, Cowell 方法

这是经典线性多步法中的两族，分别用于积分一阶的或二阶的微分方程组。Adams方法的预报公式Adams-Bashforth早在1883年提出，1926年建立了改正公式Adams-Moulton. Cowell方法的预报公式建立于1907年和1921年，称为Störmer方法，而其改正公式则由Cowell和Crommelin于1910年提出，称为Cowell公式(关于这种方法的历史，参见文献[3])。当二阶微分方程右端含有一阶导数时，两种方法应当联用，常记为Adams-Cowell方法。它有很高的计算效率。按Kinoshita等[1]在IAU第7专业委员会(天体力学)部份成员中统计，使用率也最高，约占20%。

2. RKF(Runge-Kutta-Fehlberg)方法

经典的四点四阶Runge-Kutta(RK)方法为Runge在1895年提出，并为Kutta于1901年所发展，现在已几乎不用于建立精密星历表。经典的RK方法尽管是单步法，可以变步长，但为了变步长要耗费大量计算。Fehlberg[4]在1968年提出的嵌套技术可在每步终了时方便地估计局部截断误差，以决定本步计算是否有效和估计下步步长。常用的有RKF(6)5, RKF(8)7, RKF(9)8三个算法。Fehlberg[5]在1974年也发展了直接积分二阶微分方程组的RK嵌套方法，常称为RKNF(Runge-Kutta-Nyström-Fehlberg)方法。按文献[1]的统计，RKF方法的使用率约占9%，但在中国目前用得很普遍。

---

* 国家自然科学基金资助项目。
1989年11月6日收到。

3. GBS 外推方法

本世纪 60 年代，由 Gragg、Bulirsch 和 Stoer 三人先后的努力，把 Richardson 外推法的思想予以改进，建立起来一种新的外推方法（参见文献[6]，原理可见文献[3]），常称为 GBS 外推法，有时也称为 Stoer-Bulirsch 外推法。它从一种简单的低阶方法（Gragg 的改进的中点法）算得的结果进行有理多项式外推而得到高阶的结果。在外推过程中只涉及代数计算，同时可随时估计局部截断误差以决定外推是否应当中止。文献[1]得出的使用率为 15%。

4. Everhart 方法

Everhart 于 1974 年在研究彗星轨道的过程中发展出这一方法[7]。后来发现它与 Butcher 提出过的隐式 RK 方法等价。然而，这只是理论上的等价，在实践上 Everhart 的算法有很强的优越性，不仅大大地节约了内存，也减少了计算工作量，而且可以把方法的阶提得很高而不会遇到任何困难。在本文介绍的方法中，这是唯一的方法，既可以达到任意高的阶，又可适用于任何类型的课题。文献[1]统计出的使用率为 12%。

5. Taylor 级数方法

纯 Taylor 级数方法因高阶导数难于计算而罕见使用。由 Rabe 在 1961 年[8]，Мячин 在 1970 年[9]和 Broucke 于 1971年[10]发展起来的 Taylor-Steffensen 方法，使用 Steffensen 的递推技术来计算高阶导数而可达到任意高的阶。类似的，还有 Hanslmeier、Dvorak[11]发展起来的 Lie 级数方法也属于这一类。最近，我们看到一个软件 ATOMFT，可以实现右函数为初等函数的复杂组合的微分方程的数值解。这类方法不能适应复杂的力学模型，但能实现高精度。文献[1]对各种 Taylor 级数方法的统计使用率为 11%。

6. Krogh 方法

经典的 Adams、Cowell 方法只能用于等步长计算。Krogh[12]在 60 年代末到 70 年代做的系列工作中用差商代替差分，实现了变阶变步长计算。美国喷气推进实验室(JPL)在建立 DE 系列历表时，用的就是 Krogh 方法。

从第二节到第五节就数值方法的四个主要指标[13]对这些方法进行比较和评述。

二、局部截断误差

数值方法逐步积分公式的准确度可用局部截断误差 LTE 表示

$$\mathrm{LTE} = x_n - x(t_n) = (\mathrm{CLTE})\, x_n^{(p+1)} h^{p+1} + O(h^{p+2}) \tag{1}$$

其中 x_n 是当前面各步都无误差时积分一步的数值解，而 $x(t_n)$ 是准确解，$x_n{}^{(p+1)}$ 是 $x(t)$ 在 t_n 处的第 $p+1$ 阶导数，h 为步长，CLTE 为系数。整数 p 给出 LTE 的主要特征，称为阶。各种方法的阶的情况见表 1。

当阶相同时，CLTE 绝对值的大小起着比较 LTE 大小的作用。各类方法中 Taylor 级数方法的 $\mathrm{CLTE}=1/(p+1)!$，收敛得很快。一种在多步法中引入高阶导数的多导多步法(MDMS)[14]是 Taylor 级数方法和 Adams，Cowell 方法之间的妥协，CLTE 很小，但同样存在计算高阶导数的困难。

表 1 各种方法的阶

方法＼阶	常用阶	最高阶有否限制	有限制的原因
Adams，Cowell	6—14	有	数值不稳定
RKF	6—9	有	公式和计算太复杂
GBS	2—14	有	舍入误差积累
Everhart	6—31	无	—
Taylor	2—	基本上无	阶数提高时计算量增长很快
Krogh	1—14	有	数值不稳定

三、数值稳定性

稳定性表示误差的传播规律，是决定误差积累的主要因素。它由两个因素组成：(1) 所积分的微分方程在所计算的轨道的邻域内对初值的 Ляпунов 稳定性；(2) 数值方法的数值稳定性。为区分这两个因素，在讨论数值稳定性时，常用给定的试验方程 $\dot{x}=\lambda x$ 或 $\ddot{x}=\lambda x$。对一个给定的数值方法，当给定 λ 时，h 有一个最大值 h_{max}。当实用步长 $h<h_{max}$，方法是数值稳定的，误差合理地增长；当 $h>h_{max}$，方法是数值不稳定，误差以指数规律增长。显然 h_{max} 越大数值稳定性越好。

Taylor 级数法、Everhart 方法、RKF 方法有一个共同的特点：阶 p 越高，h_{max} 越大，不存在数值稳定性问题。GBS 的数值稳定性至今未见有讨论。

Adams、Cowell、Krogh 方法属于多步法。它的特点是阶 p 越高则 h_{max} 越小。表 2 给出经典的 Adams、Cowell 方法的 h_{max} 值[15]。从表 2 可得出结论如下：(1) p 上升，h_{max} 下降，当 $p>14$ 已没有实用价值。(2)CE(校正公式)的 h_{max} 最大，其次为 PECE(预报校正)，

表 2 Adams，Cowell* 方法的 h_{max}

算法＼h_{max}＼阶		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Adams ($\lambda=\sqrt{-1}$)	PECE	0.526	0.386	0.284	0.205	0.149	0.105	0.072	0.048	0.028	0.016	0.007	0.004	0.002
Adams ($\lambda=-1$)	PECE	0.697	0.514	0.381	0.282	0.212	0.160	0.122	0.095	0.077	0.015	0.008	0.005	0.002
	PE	0.087	0.046	0.024	0.012	0.006	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	CE	1.184	0.768	0.492	0.309	0.190	0.114	0.067	0.039	0.022	0.012	0.007	0.003	0.002
Cowell ($\lambda=-1$)	PECE	2.000	1.446	1.271	1.136	1.029	0.691	0.472	0.368	0.283	0.215	0.161	0.119	0.088
	PE	0.810	0.577	0.412	0.294	0.209	0.149	0.106	0.075	0.053	0.038	0.027	0.019	0.013
	CE	2.000	2.000	2.000	1.391	0.981	0.727	0.543	0.405	0.302	0.224	0.166	0.122	0.090

* 这里 Cowell 方法的形式为第六节的(5)式。

然后是 PE(预报公式)。另外，实算表明 PEC 比 PE 的数值稳定性差，而 PECE* 算法[16] 介于 PE 和 PECE 之间(PECE* 指校正后右函数的摄动部份不重算)。(3) 对 $\lambda=\sqrt{-1}$，Adams 方法的稳定性远弱于相应的 $\lambda=-1$ 的 Cowell 方法。而把 $\ddot{x}=-x$ 化成两个一阶方程 $\dot{x}=y$，$\dot{y}=-x$ 后，特征值 λ 正是$\sqrt{-1}$。这就是为什么用 Cowell 方法直接积分二阶方程，比把二阶方程变成一阶方程组后再用 Adams 方法为好的原由。对于轨道动力学问题，实际情况接近于 $\ddot{x}=-x$。

四、复 杂 性

复杂性指的是积分一步所需工作量的大小。积分一步所费机时 T 由两部份构成

$$T=T_{RF}+T_{OH} \tag{2}$$

T_{RF} 是右函数计算时间，T_{OH} 是除计算右函数之外所用的时间。对人卫轨道等右函数比较复杂的问题，$T_{OH}\ll T_{RF}$，复杂性可用积分一步所需右函数计算次数 N 来表示。对限制性、三体等右函数比较简单的问题，必须注意 T_{OH} 所占的比重。这时没有恰当的量可表示复杂性，常用机时 T，但它与待积分的轨道的性质和程序编制有关，也可以用每步积分中除右函数计算外所需乘除法的次数，但一般情况下难于统计，表 3 中用 T_{OH}/T 的定性情况予以表示。

从表 3 可见，就复杂性的指标而言，没有第二种方法可和经典的 Adams、Cowell 方法相竞争。此外 GBS 方法的效率比较低，RKF 也不高。当微分方程右函数比较复杂时，在单步法中应当鼓励使用 Everhart 方法；当右函数十分简单时，应当使用 Taylor 级数方法。

表 3　各种方法的复杂性

方法 \ 复杂性	右函数计算次数 N	T_{OH}/T
p 阶 Adams, Cowell PE	1	可忽略
p 阶 Adams, Cowell PECE	2	可忽略
RKF(6)5 RKF(7)6 RKF(8)7 RKF(9)8	8 10 13 17	可忽略
6阶GBS 8阶GBS 10阶GBS 12阶GBS 14阶GBS	13 19 31 47 71	较小
p 阶Everhart	p	较大
p 阶 Taylor	1	p 越大越接近于 1
p 阶 Krogh	与 Adams, Cowell 同	较大

五、普适性

评价数值方法好坏的最后一项指标是普适性。主要表现在两个方面：(1) 能否适用于各种类型的微分方程；(2) 能否灵活地变阶变步长以计算中等或较大偏心率的轨道。

表 4　各种方法的普适性

方法＼普适性	适用的微分方程	适用的轨道	变步长	变阶
Adams	*—	小偏心率	很难	很难
Cowell	二阶微分方程	小偏心率	很难	很难
RKF	—	—	容易	很难
GBS	—	—	容易	很容易
Everhart	—	—	容易	很难
Taylor	右函数比较简单	—	很容易	很容易
Krogh	—	—	容易	容易

* 表示几乎没有任何限制。

表4列出各种方法的普适性情况。这里不考虑轨道处于混沌区的情况，那时所有的方法对精密星历表都无能为力[17]，而且就得到轨道统计特征而言，毫无必要使用高阶的方法。这里也不考虑刚性(stiff)微分方程的情况，那时上面介绍的方法都不甚有效。天体力学微分方程通常不是刚性的。

从表4可见，就普适性而言，Adams、Cowell方法是最差的，而GBS方法最好。GBS方法可以用外推次数来变阶，可以避免由于步长取得不当而必须重算该步。

六、Adams、Cowell方法的最佳形式

综上所述，就计算效率而言，现代发展起来的方法还没有一个可与经典的Adams、Cowell方法相比拟。因而，当轨道为近圆的和右函数比较复杂时，应当使用Adams-Cowell方法。多数人造卫星能满足这两个条件。

由于Cowell方法的数值稳定性远比Adams方法为好，一般情况下应当使用以坐标而不是以根数为变量的运动方程。

在书籍和文献中，Cowell方法却以多种形式出现。最基本的形式是p步公式

$$x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}=h^2\sum_{k=0}^{p}\beta_k f_{n+1-k} \tag{3}$$

(3)式右端可改用差分形式。以校正公式为例

$$x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}=h^2\sum_{k=0}^{p}r_k\nabla^k f_{n+1} \tag{4}$$

这里 $\nabla^k f_{n+1}$ 是 f_{n+1} 的 k 阶向后差分。因为差分还要由函数算得，(4)不具有减少舍入误差的优点。从计算方便来说，(3)比(4)优越，但(4)有容易判断 LTE 和易于变阶的优点。Krogh 的变阶变步长方法正使用了类似(4)的形式。

另一种形式是把(3)的左边写成 Taylor 级数[18]

$$x_{n+1}-x_n-h\dot{x}_n=h^2\sum_{k=0}^{p}\alpha_k f_{n+1-k} \tag{5}$$

(5)式明显出现 $\dot{x}_n$。因为 $\dot{x}_n$ 的积分结果精度一般不如 x_n 高，同时当 f 不显含 $\dot{x}$ 时，(5)式不能独立使用，(5)不如(3)。然而当右端使用 f 的高阶导数时，类似(5)的形式有明显的优点[15]。

还有使用二次和分 ${}^{\mathrm{II}}f$ 和一次和分 ${}^{\mathrm{I}}f$ 的 Cowell 公式

$$x_{n+1}={}^{\mathrm{II}}f_{n+1}+h^2\sum_{k=0}^{p-2}\mu_k f_{n+1-k} \tag{6}$$

$$x_{n+1}=h\,{}^{\mathrm{I}}f_{n+1}+h^2\sum_{k=0}^{p-1}\nu_k f_{n+1-k} \tag{7}$$

在天体力学历史上，(6)用得最多，至今仍得到广泛使用，常称为 Gauss-Jackson 方法或第二 Cowell 方法。多个作者[19,20]试图说明与(3)相比，(6)具有精度高或改进舍入误差的优点。然而可以证明[21]，(6)和(3)相比在代数上是等价的，也不具有减少舍入误差的功能。Henrici[22]曾证明了一个至今不太为人所知的结论：形式(7)与(3)相比，具有减少舍入误差积累的作用。如果说(3)、(6)舍入误差积累和积分步数 N 的平方 N^2 成比例，(7)可望与 N 成比例。因此，这里推荐使用一次和分的 Cowell 公式(7)，它可以与不用和分的 Adams 方法联合使用。

七、一些初步的结论

近些年来，与投入发展新方法所作的努力相比，在各种类型问题中对各种方法进行交叉比较显得太不够了。已有的一些比较工作，可见文献[23, 24, 25, 26, 27]。以下所列的，只能说是在上述的分析和我们有限实践的基础上得出的一些初步结论。

1. 对近圆轨道和右函数比较复杂的问题，应当使用 Adams，Cowell 方法，其中 Cowell 方法应采用具一次和分的 Cowell 方法。

2. 对于圆型限制性三体问题这类右函数形式比较简单的问题，应当使用 Taylor 级数方法。

3. 对于中等偏心率轨道的精密星历表应当使用 Krogh 或 Everhart 方法。RKF 方法一般效率不高，GBS 方法最低。但对步长要经常变化的情况，GBS 方法由于灵活地变阶有可能比较优越。

4. 只有 Taylor 级数方法和 Everhart 方法能达到很高的阶而实现超高精度计算。其中 Everhart 方法可适用任何类型的微分方程。

5．对于大偏心率的轨道，应当使用正规化技术，或采用自变量变换[28,29]，不应当认为方法能变步长而不进行变换。剧烈而经常地变步长会严重地影响结果的精度。

6．对于能变阶变步长的方法，有两个问题切需注意：(1)尽可能准确地估计下一步应用的阶或步长，以最大限度地防止因积分一步失败而重新计算该步；(2)阶和步长的渐变方案优于剧烈变化(如减少一半或扩大2倍)。后者往往会降低效率或造成精度损失。

7．对于建立精密星历表的数值积分，应当采用基于能量积分的稳定化技术[30,31]，以消除沿迹误差。这项技术配以使用一次和分的Cowell方法或其他单步法，可做到在一定时间段内保证误差的线性增长。

8．低精度要求的计算应当用低阶方法；高精度要求的计算则用高阶方法。

9．计算精密星历表的程序应当附有用开关控制的精度检验程序。关于精度检验方法，可参阅文献[17，32]。

参 考 文 献

[1] Kinoshita, H. and Nakai, H., *Celes. Mech.*, 45 (1989), 231.
[2] 张捷，何妙福，天文学进展，8 (1990).
[3] Lambert, J. D., Computational Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons, (1973).
[4] Fehlberg, E., NASA TR R-287, (1968).
[5] Fehlberg, E., NASA TR R-432, (1974).
[6] Stoer, J., in Lecture Notes in Mathematics, ed. by D. G. Bettis, 362 (1974), 2.
[7] Everhart, E., *Celes. Mech.*, 10 (1974), 35.
[8] Rabe, E., *Astron. J.*, 66 (1961), 500.
[9] Мячин, В. Ф., БИТА, 12 (1970), 389.
[10] Broucke, R., *Celes. Mech.*, 4 (1971), 110.
[11] Hanslmeier, A. and Dvŏrak, R., *Astron. Astrophys.*, 132 (1984), 203.
[12] Krogh, F. T., in Lecture Notes in Mathematics, ed. by D. G. Bettis, 362 (1974), 22.
[13] 黄天衣，人造卫星观测与研究，(1989a), No. 2, p. 13.
[14] Huang, T. -Y. and Valtonen, M., *Celes. Mech.*, 42 (1988), 223.
[15] 黄天衣，多导多步法的数值稳定性，(1990)，待发表.
[16] Velez, C. E., Cefola, R. J. and Long, A. C., in Lecture Notes in Mathematics, ed. by D. G. Bettis, 362 (1974), 183.
[17] Huang, T. -Y. and Innanen, K. A., *Astron. J.*, 88 (1983), 870.
[18] Lundberg, J. B. Jr., Master thesis, Univ. of Texas at Austin, (1981).
[19] Herrick, S., Astrodynamics, (1972).
[20] Brouwer, D. and Clemence, G. M., Methods of Celestial Mechanics, Academic Press, (1961).
[21] 丁华，黄天衣，天文学报，21 (1980), 58.
[22] Henrici, P., Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons, (1962).
[23] Hull, T. E., Enright, W. H., Fellen, B. M. and Sedgwick, A. E. *SIAM J. Numerical Analysis*, 9 (1972), 603.
[24] Moore, H., in Lecture Notes in Mathematics, ed. by D. G. Bettis, 362 (1974), 149.
[25] Papp, K. A., Innanen, K. A. and Patrick, A. T., *Celes. Mech.*, 18 (1978), 277.
[26] Papp, K A., Innanen, K. A. and Patrick, A. T., *Celes. Mech.*, 21 (1980), 277.
[27] Fox, K., *Celes. Mech.*, 33 (1984), 127.
[28] Stiefel, E. and Schifele, G., Linear and Regular Celestial Mechanics, Springer-Verlag, (1971).
[29] 黄天衣，丁华，天文学报，22 (1981), 328.
[30] Baumgarte, J. and Stiefel, E., in Lecture Notes in Mathematics, ed. by D. G. Bettis, 362 (1974), 207.
[31] 丁华，黄天衣，天体力学数值方法，南京大学讲义，(1983).
[32] 黄天衣，丁华，天文学报，26 (1985), 256.

（责任编辑　舒似竹）

A Comparative Study of Integrators for Constructing Ephemerides with High Precision

Huang Tianyi

(Department of Astronomy, Nanjing University)

Abstract

There are four indexes for evaluating various integrators. They are the local truncation error, the numerical stability, the complexity of computation and the quality of adaptation. A review and a comparative study of several numerical integration methods, such as Adams, Cowell, Runge-Kutta–Fehlberg, Gragg–Bulirsch–Stoer extrapolation, Everhart, Taylor series and Krogh, which are popular for constructing ephemerides with high precision, has been worked out in this paper. A few of preliminary conclusions and advices are provided in Section 7 for the relevant scientists and engineers.