

相对论天体力学

易 照 华

(南京大学天文系 南京 210008)

黄 斌

(中国科学院上海天文台 上海 200030)

李 林 森

(东北师范大学物理系 长春 130024)

摘 要

本文综合评述正在建立的一门新学科——相对论天体力学，其中包括基础理论课题（分为相对论质点组动力学和相对论延伸体动力学）和具体天体运动理论课题（又分为相对论太阳系动力学和相对论恒星系统动力学）。最后对最新建立的系统理论 DSX 方法作简短介绍。

1 概 况

长期以来，天体力学同牛顿的名字分不开；尽管在 19 世纪后期已发现牛顿天体力学在解释天体运动现象上有偏差，仍然如此。自广义相对论出现（1916 年）后，Einstein^[1]，de Sitter^[2]，Eddington^[3]，Droste^[4]，Chazy^[5] 等人试图建立以广义相对论为基础的天体运动理论，直到 1938 年 Einstein, Infeld, Hoffman^[6] 建立了相应方程（简称 EIH 方程）而告一段落，初步形成了后牛顿天体力学，作为相对论天体物理学的一部分。但直到 60 年代都没有很大进展，有两方面原因：一是理论上困难，相对论多体和延伸体动力学问题都未能找到严格解，无法建立严格的运动方程；二是观测精度不高，用牛顿力学已能解决绝大多数天体运动课题。

60 年代以后，原子时频进展和观测新技术如激光测月（LLR）、激光测卫（SLR）和甚长基线干涉测量（VLBI）等的出现，使天体测距和定位精度大幅度提高，牛顿天体力学的偏差日益显著，于是用广义相对论建立天体的运动理论又提到议事日程。具体研究方法沿下面两条途径发展。

一条是随着引力理论本身的发展进行。60 年代初曾发现太阳扁率较大（约 2×10^{-5} ），对水星近日点进动速率的广义相对论结果产生约 10% 的误差，引起物理学界对广义相对论这个引力理论的怀疑。1961 年出现的 Brans-Dicke^[7] 理论是第一个向广义相对论挑战的一种新引力理论。此后 20 年内先后提出上百种引力理论，连同实验技术一起，建立了引力物理学。但各种引力理论要得到场方程的严格解都很困难，为了检验又必须同实验或观测比较，由此在 70 年代开始建立参数化后牛顿（PPN）方法，并于 1981 年正式系统

化^[8]。各种不同引力理论有自己的参数值(最多 10 个不同参数)。随着观测精度的提高,近年来又在建立参数化二阶后牛顿理论。

另一条途径是以不同类型天体运动为背景,分别建立质点组和延伸体(作为流体)的相对论动力学。由于场方程严格解困难,除少量一体问题外,都只能建立后牛顿近似的理论。为了光线弯曲和引力波的精确讨论,建立了一体和二体的高阶后牛顿理论。这种动力学方程,一般都是牛顿项和后牛顿项(包括高阶后牛顿项)所组成;由后牛顿项产生的运动效应,文献中常称为相对论效应,显然同所用参考系有关,由此建立相应的相对论参考系理论。这两条途径的研究成果,就成为相对论天体力学的理论基础。

第一次提出相对论天体力学作为学科的是俄国人勃隆别格(Б р у м б е р г),他在 1972 年出版的书中就用“相对论天体力学”作为书名^[9],书中阐明了这个学科的基本内容。但因此书用俄语出版,国际上影响不大。直到 80 年代才开始引起重视,并于 1985 年在列宁格勒(现名圣彼得堡)召开的“天体力学和天体测量学中的相对论”学术讨论会(IAU Symposium No.114)^[10]上建议他把“相对论天体力学”一书修改后用英语出版^[11]。到目前为止,一些文摘刊物开始把相对论天体力学作为一个专门研究领域,但对它是否可作为一个新建学科尚有争议。下面介绍它的主要课题和当前进展。

2 基础理论课题

作为一个学科,必须有自己的基础理论;对于研究天体运动的学科,应该建立起有关力学模型的相对论动力学,包括建立运动方程和解的方法。

2.1 相对论质点组动力学——相对论多体问题

由于质点组模型的爱因斯坦场方程的严格解尚未解决,目前进展如下:

2.1.1 一体问题

即讨论检验体在已知度规场作用下的运动。但因已得到的严格解很少,故一体问题也只有 Schwarzschild, Kerr, 和 Weyl-Levi-Civita 等度规下的严格运动方程,且为可积系统。

2.1.2 二体问题

即研究两个质点(或质量分布为球对称)模型在广义相对论框架下的运动。由于未求出场方程的严格解,故相对论二体问题的严格运动方程至今仍无法列出,只有后牛顿(PN)、参数化后牛顿(PPN)^[8]以及二阶后牛顿(PN2)二体问题得到了完整的运动方程,而且是可积系统。为了引力辐射研究,二阶半后牛顿(PN2.5, 准到 c^{-5} , c 为光速)二体问题已有不少人研究,得到运动方程^[12];最近又在讨论三阶半后牛顿(PN3.5)二体问题^[13]。

2.1.3 三体问题

严格解未找出,只有近似运动方程。目前已求出 PN 限制性三体问题(勃隆别格)^[11]和 PN 及 PN2 的一般三体问题(Schäfer)^[14]的运动方程。

2.1.4 多体问题

没有求出严格解,现在只有 PN 多体(EIH)方程^[6], PPN 多体运动方程(Will)^[8],

最近正研究 PN2 多体和二阶 PPN 多体的运动方程。

2.2 相对论延伸体动力学

质点模型大多数情况下不能适用于天体，一般用延伸体，即具有一定大小形状及不同物质分布的流体作为天体模型。在相对论框架下，研究这些延伸体的自转和空间运动就形成了相对论延伸体动力学。建立这种动力学的严格理论有两方面困难：

2.2.1 相容性困难

度规张量 $g^{\alpha\beta}$ 必须满足爱因斯坦场方程：

$$\mathbf{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathbf{R}g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathbf{T}^{\alpha\beta}, \quad (1)$$

能量动量张量 $\mathbf{T}^{\alpha\beta}$ 中含有各延伸体内部各处的压力 p 和密度 ρ 以及 $g^{\alpha\beta}$ 。但对各延伸体而言， p, ρ 必须满足物态方程：

$$p = p(\rho) \quad (2)$$

此物态方程同延伸体内自引力有关，描述自引力又要用到度规张量 $g^{\alpha\beta}$ ，因此 (1)、(2) 式存在相容性问题。

此外，(1)、(2) 式同边界约束条件如距离充分大时 $g^{\alpha\beta} \rightarrow \eta^{\alpha\beta}$ (Minkovsky 张量) 也存在相容问题。

2.2.2 动力学基本量的定义困难

描述某延伸体的空间运动，必须用它的质量中心运动来表达；延伸体的自转必须用到自引力的动量矩和力矩以及外引力的力矩等。在弯曲时空中，建立严格的物体质量中心定义，自引力和外引力的力矩和动量矩的定义，非常困难，至今未能解决。

另外，即使上面两个困难能解决，寻找延伸体模型的场方程严格解，比质点组情况要困难得多，至少在短期内无法解决。

正因为如此，当前延伸体动力学只能建立近似理论。在 PN1 近似下，各动力学基本量都可具体定义，质心运动方程都已建立，形状影响可用多极矩展开。现在已能列出 N 个延伸体的 PN1 运动方程，而且可讨论轨道运动和自转的耦合效应^[12]。

在 PN1 近似下，近年内出现一些新方法。一种是俄国勃隆别格和 Kopejkin 提出的渐近匹配方法^[15-19]，比以前的方法数学上更有效，物理意义更明确；而且同时考虑延伸体多极矩，自转和密度分布，在建立运动方程同时也建立起局部和全局坐标系。另一种就是 DSX 方法，将在后面具体介绍。

3 相对论太阳系动力学

随着太阳系天体的定位精度提高，特别是 LLR、SLR 和雷达测距，相对精度达 10^{-10} — 10^{-11} ；而牛顿力学在太阳系内精度仅 10^{-7} — 10^{-8} ，故建立相对论太阳系动力学已成急需。由于基础理论课题解决得不好，当前相对论太阳系动力学只能集中在下列方

面：

3.1 太阳系天体运动的相对论效应，主要研究三种天体的运动

3.1.1 大行星运动

在一定的参考系框架内，讨论运动方程后牛顿项对大行星轨道根数的影响；并同观测比较以检验广义相对论或其他新引力理论。水星近日点进动是这方面最早的课题，在60年代初因发现太阳扁率大而对广义相对论产生怀疑，80年代以后多次重新测定太阳扁率，只有 10^{-6} 量级，使广义相对论的水星近日点进动值的偏差降到1%，因而矛盾缓和。现在已求出二阶后牛顿的结果。对所有大行星的全部轨道根数的相对论效应进行研究的代表是法国国际时间局 (BIH) 的 Lestrade 等人，他们在球对称太阳的 PPN 多体问题运动方程 (只用两个 PPN 参数 β, γ) 基础上，给出了各大行星的半长径 a ，平黄经 $\lambda, h = e \sin(\omega + \Omega)$ ， $k = e \cos(\omega + \Omega)$ 的相对论效应分析表达式，并算出了展开式系数值，在100年内准到 10^{-10} [20]。现在看来，所得结果除常数项外，数量级是可靠的，还需要进一步精确化。

3.1.2 月球运动

由于 LLR 已有 20 多年历史，精度还在不断提高；目前已达厘米级 (10^{-10})，预计几年后可达毫米级。天文学家和物理学家都寄希望于月球运动的相对论效应研究，并从同观测比较中检验各种引力理论。

至今对此课题研究得最多的还是勃隆别格，他早在 1958 年 (博士论文) 就开始 [21]，到 1982 年已有系列结果 [11]。他提出的方法可称为后牛顿 Hill-Brown 方法，也是一种后牛顿限制性三体问题。他们给出了月球向径、黄经和黄纬中各主要项的相对论改正值，并在其中分别给出 PPN 参数 β, γ 以及不含 β, γ 各项的系数。其中有两个结果值得注意；一是向径 r 的相对论效应，最大是振幅约 100cm 的周期项，周期为半个朔望月；另一项振幅约 40cm，周期为 1 近点月；这两项容易被 LLR 观测证实。另一结果是月球轨道的测地岁差：

$$\Delta\omega = 1''.728a^{-1}, \Delta\Omega = 1''.901a^{-1} \quad (3)$$

这也容易从观测证实。

此外，不少研究者还得到一些其他效应，当前最重视的是下面两种：

Nordtvedt 效应 [22]。这是假定地月的引力质量和惯性质量不相等所产生的效应，反映在地月距离上的最大项为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\rho &= 9.2\eta \cos(L - L')(m), \\ \eta &= 4\beta - \gamma - 3 - \frac{10}{3}\xi - \alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{2}{3}\zeta_1 - \frac{1}{3}\zeta_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 L, L' 为月球和太阳的地心平黄经； $\beta, \gamma, \xi, \alpha_1, \alpha_2, \zeta_1, \zeta_2$ 等为 PPN 参数； η 就称为 Nordtvedt 参数，当天体引力质量和惯性质量相等时为零。因此，Nordtvedt 效应是强等效原理的检验之一，又称为空间 Eötvös 实验。经多次用 LLR 观测资料反测 η 值都在 0.001 [23]，而且误差比它更大，故不能下结论，看来要等 LLR 精度到毫米级时才能有可靠结果。

Mashhoon 效应^[24,25]。这是由太阳自转在月球运动中产生的相对论效应，1985 年首先是 Mashhoon 导出^[25]，对月球轨道升交点黄经 Ω 和地月距 ρ 有影响，具体式子为：

$$\Delta\Omega = 0'' .5 \sin(\omega t + B), \quad \text{周期约 } 6.7 \times 10^7 \text{ yr},$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -At + \sum_{i=1}^3 A_i \cos(\omega_i t + B_i),$$

其中 $A \sim 10^{-16} \cdot \text{yr}^{-1}$, $A_i \sim 10^{-11}$, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 对应的周期分别为 1yr, 0.5yr, 1 月。因效应微弱，至今尚未在观测中验出。

3. 1. 3 卫星运动

自从带激光反射器卫星发射及 SLR 观测网建立后，人造卫星定位精度大幅提高；必须而且可能在人卫运动中考虑相对论效应。在后牛顿精度下，讨论人造卫星的相对论效应的理论已趋完善，代表性的结果有下面两种：

一是以中国人为主的结果，在 1990—1992 年间的系列论文中^[26,27]，逐步完整地列出人造卫星在后牛顿精度下的运动方程，包括 Schwarzschild 解，测地岁差，Lense-Thirring 进动和地球形状摄动；还给出了这些项的直接的和混合的分析解。

另一种是俄国人在所提出的渐近匹配方法基础上给出的^[28,29]，最后得到了一种后牛顿人卫运动方程的封闭形式（避免按地心坐标展开）；并分别在他们定义的动力学及运动学地心系（DGRS 及 KGRS）中表达，自变量用太阳系质心坐标时（TCB）及地心坐标时（TCG），简化了在质心系和地心系中的时间尺度因子的引入。

除月球和人造卫星外，天然卫星的相对论效应也开始引起重视。例如，对木卫一和土卫 1980S28，它们的近星点相对论进动值 ($\Delta\omega$) 分别为 $270''/\text{世纪}$ 和 $720''/\text{世纪}$ ；太阳自转的 Lense-Thirring 效应 ($\Delta\Omega$) 分别为 $9''/\text{世纪}$ 和 $50''/\text{世纪}$ ^[12]。这些都是检验新引力理论的新对象，对天然卫星的相对论效应研究还刚开始。

3. 2 太阳系动力参考系的精确化

由于相对论效应与参考系有关，必须建立准确的实用参考系，以及这些参考系之间的准确变换关系。当前实用的参考系主要有：

3. 2. 1 太阳系质心参考系 BRS

以太阳系质心作空间坐标原点，度规场中考虑所有较大天体的引力势（太阳、大行星、月球、质量较大的小行星和卫星）。在 PN1 精度下已实现的有以下几种：一是 JPL 给出的 DE 系列数值历表，DE200(LE200) 已国际通用，DE303 已在试用，但精度仍不符合要求（只有 10^{-8} — 10^{-9} ）；二是法国和比利时合作的分析历表 VSOP-82，精度与 DE200 相近；三是德国给出的数值历表 GLE2000，据作者讲可比 DE200 精度高^[12]，但未见具体报道。此外还有日本的数值历表 (Japanese Ephemeris, 1985)，其精度也不亚于 DE200^[30]。但现有历表都还不符合精度要求，必须继续精确化。

3. 2. 2 地心参考系 GRS

包括非旋转和旋转（观测者站心）两种，已建立的有很多，考虑地球引力场各种后牛顿项以及日月引力的潮汐项和相对论效应。理论上较完整时是 1989 年俄国人 Kopejkin

提出的一种^[31]。另外,某些准确的人造卫星历表也是一种地心参考系,如全球定位系统(GPS)等。与BRS一样,有待于进一步精确化。

3.2.3 卫星参考系 SRS

随着空间天体测量技术的发展,特别是近年提出的空间 VLBI 和 POINT 计划,需要高精度的卫星参考系,希望能达到微角秒量级,目前尚未实现。

此外,上述三种参考系之间的变换,已有很多研究,最近 Klioner 和 Kopejkin 提出的结果认为可符合微角秒级天体测量的要求^[13],尚有待证实。

4 相对论恒星系统动力学

这是希腊天文学家 Contopoulos 在 1983 年提出的一个专门研究领域^[32],即在广义相对论框架下,研究各种恒星集团(双星、聚星、星团、星系……)的动力学规律。其中相对论聚星、星团、星系以及宇宙动力学内容都与相对论天体物理学中的内容相同,在这里不谈。相对论双星动力学,特别是脉冲双星动力学,由于精度要求高,成为相对论天体力学中的一个热门课题;又因与引力辐射的检验相关,也是引力理论和相对论天体物理学的一个前沿课题。自 1974 年发现第一个脉冲双星 PRS1913+16 以后,10 多年观测资料表明:公转周期变率与广义相对论引力辐射理论预言值符合得很好(偏差小于 5%)^[33,34];近星点进动率高达 $4^{\circ}.2\cdot\text{yr}^{-1}$,为水星近日点相对论进动率的 4000 倍!近年内开始更深入研究,一方面研究其他轨道根数和自转参数相对论效应,另外又继续讨论高阶 PN 的影响^[35,36,37]。我国也有人从自转理论给出脉冲星的密度下限^[38]。

5 最新 PN 系统理论——DSX 方法

由法国物理学家 Damour,德国天文学家 Soffel 和中国物理学家须重明(Xu Congming)组成的研究组,最近几年内完成了 N 个延伸体运动在 PN1 精度下的严格理论。取名为广义相对论天体力学(General-Relativistic Celestial Mechanics),分为四篇论文发表:(1)方法和参考系定义(已在 1991 年 5 月发表^[39]);(2)移动运动方程(已在 1992 年 2 月发表^[40]);(3)自转运动方程(只见到 preprint);(4)卫星运动。现在已受到国际上重视,称为 DSX 方法。

5.1 方法的特点

力学模型为 N 个任意形状和结构的可变形自转延伸体同另一个检验体在广义相对论 PN1 精度下的运动(当然假定为弱场低速),又可称为 N+1 体问题。方法主要特点为:

1. 内外问题结合。讨论 N+1 体的质心在空间的运动称为外问题,需要建立全局的参考系;讨论各延伸体绕自己质心的运动称为内问题,需要建立各延伸体质心为原点的局部参考系。DSX 方法解决了这两种参考系的自治,保证了内外问题严格在 PN1 精度下统一进行。

2. 对能量动量张量 $\mathbf{T}^{\mu\nu}$ 不加任何限制,就是延伸体的形状结构完全任意。

3. 给出了 PN1 精度下的多极矩和潮汐矩定义, 用于表示各延伸体的结构以及 $T^{\mu\nu}$ 。

4. 用他们提出的“指数参数化”度规来对场方程及坐标变换进行线性化, 得到 PN1 精度的结果。

5. 改变坐标条件, 不用谐和坐标或标准后牛顿坐标的微分条件, 而用他们自己提出的一个代数条件:

$$\mathbf{g}_{00}\mathbf{g}_{ij} = -\delta_{ij} + O(c^{-4}) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (5)$$

其中 \mathbf{g}_{00} , \mathbf{g}_{ij} 即度规张量分量, δ_{ij} 即 δ 函数; (5) 式实际上给出了一个空间各向同性坐标系, 又称为“保角笛卡尔坐标系”。

6. 时间坐标能与空间坐标独立 [在 $\delta t = O(c^{-4})$ 量级], 使运算方便。

5.2 得到的主要结果

给出了 N+1 体的空间移动方程, 实际上是推广了 EIH 方程; 其中有轨道 - 自旋及自旋 - 自旋耦合项, 第一次把每一体的运动表示为它自身 PN 多极矩和其他体的潮汐矩耦合的结果。又给出了各体自旋向量的运动方程, 并讨论了各种进动以及由 PN 多极矩和 PN 潮汐矩产生的主要相对论效应。另外还联系太阳系情况作了初步讨论。大量的应用和检验会在今后几年内进行。

勃隆别格已对 DSX 方法表态 (私人通信), 认为 DSX 方法比他们提出的渐近匹配方法更好。

参 考 文 献

- [1] Einstein A. Annalen der Phys., 1916, 49: 769
- [2] de Sitter W. M. N. R. A. S., 1916, 76: 699. 1916, 77: 155
- [3] Eddington A S. M. N. R. A. S., 1916, 76: 716
- [4] Droste J. Versl. K. Wet. Amsterdam, 1916, 19: 447
- [5] Chazy J. La théorie de la relativité et la mécanique céleste, Paris: Gauthier-Villar, 1928
- [6] Einstein A, Infeld L, Hoffman B. Ann. Math., 1938, 39: 65
- [7] Brans C H, Dicke R H. Phys. Rev., 1961, 124: 925
- [8] Will C. Theory and experiment in gravitational physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1981. chap.4-8
- [9] Б р у м б е р г В А . Р е л е т и в и с к а я н е б е с н а я м е х а н и - к а . М о с к в а : Н а у к а , 1972
- [10] Kovalevsky I, Brumberg V A eds. Proc. IAU symp. No.114, Leningrad, 1985, Dordrech-Boston: Reidel, 1986: 5
- [11] Brumberg V A. Essential relativistic celestial mechanics. Bristol: Adam Hilger, 1991
- [12] Soffel M H. Relativity in celestial mechanics, astrometry and geodesy. Heidelberg: Springer, 1989. chap.4
- [13] Klioner S A, Kopejkin S M. A. J., 1992, 104 (2): 897
- [14] Schäfer G. Phys. Lett., 1987, A123: 336
- [15] Brumberg V A, Kopejkin S M. Reference system. Dordrecht: Kluwer, 1989. 36
- [16] Brumberg V A, Kopejkin S M. Nuovo Cimento, 1989, B103: 63
- [17] Brumberg V A, Kopejkin S M. Celest. Mech., 1990, 48(1): 23
- [18] Kopejkin S M. Celest. Mech., 1988, 44(1): 87

- [19] Kopejkin S M. *Manuscrpita Geodaetica*, 1991, 16: 301
- [20] Lestrade J F, Bretagnon P. *Astron. Astrophys.*, 1982, 42: 105
- [21] Brumberg V A. *Bull. Inst. Theor. Astron(USSR)*, 1958, 6: 733
- [22] Nordtvedt K Jr. *Phys. Rev.*, 1971, D3: 1683
- [23] Shapiro I I, Counseleman C C, King R W. *Phys. Rev. Lett.*, 1976, 36: 555
- [24] Mashhoon B. *Gen. Relativ. Gravitation*, 1984, 16: 311
- [25] Mashhoon B. *Found. Phys.*, 1985, 15: 497
- [26] Huang Cheng *et al.* *Celest. Mech.*, 1990, 48: 167
- [27] Huang C, Liu Lin. *Celest. Mech.*, 1992, 53: 293
- [28] Brumberg V A. *Astron. Astrophys.*, 1992, 257(2): 777
- [29] Jupp A H, Brumberg V A. *Celest. Mech.*, 1991, 52(4): 345
- [30] Japanese ephemeris: basis of the new Japanese ephemeris. Tokyo: Hydrographic Department, Maritime Agency, 1985. 476
- [31] Kopejkin S M. *Astron. Zh.*, 1989, 66: 1289
- [32] Contopoulos G. In: Abell G O, Chincarini G eds. *Proc. IAU symp. No.104, Dordrecht-Boston: Reidel*, 1983: 417
- [33] Taylor J H, Weisberg J M. *Ap. J.*, 1989, 345: 434
- [34] Damour T, Taylor J M. *Ap. J.*, 1991, 366: 501
- [35] Blanchet L, Schafer G. M. N. R. A. S., 1989, 239: 845
- [36] Lincoln C W, Will C M. *Phys. Rev.*, 1990, D42: 1123
- [37] Junker W, Schaafer G. M. N. R. A. S., 1992, 254: 146
- [38] 易照华. 第一届张衡学术讨论会论文摘要. 西安, 1990: 40
- [39] Damour T, Soffel M, Xu Congming. *Phys. Rev.*, 1991, D43(10): 3273
- [40] Damour T, Soffel M, Xu Congming. *Phys. Rev.*, 1992, D45(4): 1017

(责任编辑 刘金铭)

Relativistic Celestial Mechanics

Yi Zhaohua

(*Astronomy Department, Nanjing University, Nanjing 210008*)

Huang Cheng

(*Shanghai Astronomical Observatory, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030*)

Li Linshen

(*Physics Department, Northeast Normal University, Changchun 130024*)

Abstract

This paper synthetically reviews a new establishing discipline — Relativistic Celestial Mechanics. It includes basic theory and motion theory for the specific bodies. The former can be devided into the relativistic dynamics of system of particles and the relativistic dynamics of extended bodies, and the latter further contains the relativistic dynamics of solar system bodies and the relativistic dynamics of stellar systems. At last, the newest DSX theory is introduced briefly.