Hamilton 系统数值计算的新方法

廖新浩 刘 林

(南京大学天文系 南京 210093)

摘 要

系统地介绍了近年来对 Hamilton 系统数值计算新建立的辛算法和线性对称多步法，并对它们在动力天文中的应用作了一简要回顾。

关键词 天体力学

1 引 言

动力天文中，大多数问题均可用 Hamilton 正则运动方程来描述。Hamilton 系统的研究是动力系统研究领域中的一个重要课题。由于对大多数 Hamilton 系统均得不到解析解，故在研究中常常借助于数值方法。因此，数值方法在 Hamilton 系统的研究中占有较重要的位置。

在 Hamilton 系统求解时，常用传统的数值方法主要有两类：(1) 单步法，如 Runge–Kutta 方法；(2) 线性多步法，如 Adams 方法和 Cowell 方法。然而这些传统的数值方法均使 Hamilton 系统的能量随时间呈线性变化。这显然会歪曲 Hamilton 流的整体特征。对于动力天文中的一些问题，如最简单的二体问题，能量随时间呈线性变化将导致近点角经度的误差随时间呈平方增长 (这是因为运动角速度依赖于能量)。这种严重的误差积累是由数值方法本身造成的，因为传统算法对应的差分系统都是一耗散系统，即其步进算子的 Jacobi 行列式值不为 1。为解决这一误差严重积累问题，可采用能量控制方法 [1–4]，这是一种人为的对算法造成的能量变化从某个方面对运动进行补偿。这种补偿，在一定条件下，可使传统算法下的近点角经度误差被控制为随时间呈线性变化 [2–4]。

近年来，对于 Hamilton 系统，由冯康等人建立的辛算法 (Symplectic Algorithm) 保持了 Hamilton 流的辛结构，使得系统的能量不发生长期变化 [5–7]，因而在动力天文研究中正逐渐被采用。Quinlan 和 Tremaine 在将线性对称多步法应用于 Hamilton 系统时，发现对保持系统的能量有一定的效果，且建立了高阶线性对称多步法 [8]。下面就对这两种算法 (特别是理论依据极强的辛算法) 的思想及构成作一介绍。

国家攀登计划资助项目

1995 年 3 月 1 日收到

2 Hamilton 系统与辛算法

考虑 Hamilton 函数为 $H = H(p,q)$ 的正则系统：

$$\dot{q} = \partial H/\partial p, \qquad \dot{p} = -\partial H/\partial \dot{q} \tag{1}$$

这里 $q \in R^n$, $p \in R^n$, 它们是一对正则共轭变量。系统 (1) 有一非常重要的整体几何结构，即其相流 g_H^t 保持辛结构 (Symplectic Structure)[9]，数学上可表示为

$$(g_H^t)^* \omega^2 = \omega^2, \tag{2}$$

这里 $(g_H^t)^*$ 为 g_H^t 的拉回 (pull back) 映射， ω^2 是 R^{2n} 上的一个非退化的闭的微分 2- 形式，即辛结构。如将 ω^2 作用到任意两个不为零的切向量 ξ,η 上，则有

$$\langle (g_H^t)_* \xi, \quad (g_H^t)^* \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle, \tag{3}$$

这里 $(g_H^t)_*$ 是 g_H^t 的切映射， $\langle \xi, \eta \rangle$ 的定义如下：

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^T J \eta, \qquad J = \begin{pmatrix} O & E_n \\ -E_n & O \end{pmatrix}, \tag{4}$$

O 为 n 阶零方阵， E_n 为 n 阶单位方阵，“T”表示转置。这样由 (3) 式可得

$$(g_H^t)_*^T J (g_H^t)_* = J. \tag{5}$$

在 R^{2n} 空间中，一个映射的切映射就是此映射的 Jacobi 矩阵。如分别记 t_{n+1} 时和 t_n 时的 p,q 值分别为 $p(t_{n+1}), q(t_{n+1})$ 和 $p(t_n), q(t_n)$，则从 (5) 式得

$$\left(\frac{\partial(p(t_{n+1}), q(t_{n+1}))}{\partial(p(t_n), q(t_n))} \right)^T J \left(\frac{\partial(p(t_{n+1}), q(t_{n+1}))}{\partial(p(t_n), q(t_n))} \right) = J, \tag{6}$$

即矩阵 $(\partial(p(t_{n+1}), q(t_{n+1}))/\partial(p(t_n), q(t_n)))$ 为辛矩阵。通俗地讲， $g_H^{\Delta t}|_{\Delta t = t_{n+1} - t_n} : p(t_n), q(t_n) \longrightarrow p(t_{n+1}), q(t_{n+1})$ 是正则变换。当用数值方法去求解系统 (1) 时，如果分别记 t_{n+1} 时和 t_n 时的数值解为 p_{n+1}, q_{n+1} 和 p_n, q_n，则称使矩阵 $(\partial(p_{n+1}, q_{n+1})/\partial(p_n, q_n))$ 为辛矩阵的数值方法为辛算法 [10]。

3 显式辛算法的建立

经典力学中，大多数 Hamilton 系统均具有如下可分离形式的 Hamilton 函数

$$H(p,q) = T(p) + V(q). \tag{7}$$

若记 $z = (p,q)$，则相应的正则运动方程可表示为：

$$\dot{z} = \{z, H\} = D_H z, \tag{8}$$

这里 D_H 表示由 Poisson 括号 $\{\cdot, H\}$ 定义的微分算子。 (8) 的解可形式表示为

$$z(t)=\exp(tD_H)z_0=\exp[t(D_T+D_V)]z_0, \tag{9}$$

这里 exp 代表指数函数， z_0 是 $t=0$ 时的 z 值。称一个数值方法是 k 阶的，则其步进算子 G_k^τ 应是对系统的流算子 $\exp(\tau D_H)$ 的 k 阶逼近，这里 τ 为步长，即应有

$$G_k^\tau=\exp(\tau D_H)+O\left(\tau^{k+1}\right) \tag{10}$$

由 Lie 群理论中的 Baker–Campbell–Hausdorff 公式 [11] 可以证明如下结论 [12–14] ：

$$\begin{aligned}
(1)G_1^\tau &\triangleq \exp(\tau D_T)\exp(\tau D_V)=\exp(\tau D_H)+O(\tau^2),\\
\check{G}_1^\tau &\triangleq \exp(\tau D_V)\exp(\tau D_T)=\exp(\tau D_H)+O(\tau^2);\\
(2)G_2^\tau &\triangleq G_1^{\tau/2}\circ\check{G}_1^{\tau/2}=\exp\left(\tfrac{\tau}{2}D_T\right)\exp(\tau D_V)\exp\left(\tfrac{\tau}{2}D_T\right)=\exp(\tau D_H)+O(\tau^3),\\
\check{G}_2^\tau &\triangleq \check{G}_1^{\tau/2}\circ G_1^{\tau/2}=\exp\left(\tfrac{\tau}{2}D_V\right)\exp(\tau D_T)\exp\left(\tfrac{\tau}{2}D_V\right)=\exp(\tau D_H)+O\left(\tau^3\right);\\
(3)G_4^\tau &\triangleq G_2^{\alpha\tau}\circ G_2^{\beta\tau}\circ G_2^{\alpha\tau}=\exp(\tau D_H)+O(\tau^5),\\
\check{G}_4^\tau &\triangleq \check{G}_2^{\alpha\tau}\circ \check{G}_2^{\beta\tau}\circ \check{G}_2^{\alpha\tau}=\exp(\tau D_H)+O(\tau^5);
\end{aligned}$$

$$\alpha=1/\left(2-2^{1/3}\right),\qquad \beta=-2^{1/3}/\left(2-2^{1/3}\right),$$

则 G_1^τ 与 $\check{G}_2^\tau, G_2^\tau$ 与 $\check{G}_2^\tau, G_4^\tau$ 与 $\check{G}_4^\tau$ 分别为 1 阶、 2 阶、 4 阶算法。由于 $\exp(\tau D_T)$ 和 $\exp(\tau D_V)$ 是辛映射，它们的复合仍然是辛的，故这些算法均是辛算法，且是显格式的。 G_1^τ 的差分格式为

$$\left\{\begin{aligned}p_{n+1} &= p_n-\tau\partial V(q_n)/\partial q_n,\\ q_{n+1} &= q_n+\tau\partial T(p_{n+1})/\partial p_{n+1}.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

其他算法的差分格式由步进算子的定义可直接写出。

对于 2 阶和 4 阶辛算法，易证 [12–14] ：

$$G_{2m}^\tau\circ G_{2m}^{-\tau}=I=\check{G}_{2m}^\tau\circ\check{G}_{2m}^{-\tau},\quad m=1,2, \tag{12}$$

这里 I 为恒同映射。这说明 2 阶和 4 阶算法对时间是可逆的。

6 阶、 8 阶算法均可按 4 阶算法构成方法去构造，它们均已被建立 [12] 。

按照 (9) 式的表达方法，事实上， $\exp(\tau D_T)$ 和 $\exp(\tau D_V)$ 分别是 Hamilton 函数为 $T(p)$ 和 $V(q)$ 系统的相流，它们均是 Euler 流 (时间 t 的线性函数) 。对此思想加以推广，一般地，若某一 Hamilton 函数可表示为

$$H(p,q)=\sum_{i=1}^{s}H_i(p,q), \tag{13}$$

其中每一个 $H_i(p,q)$ 独立形成的 Hamilton 系统的相流 $g_{H_i}^t$ 分析上均可解出，则

$$\begin{aligned}G_1^\tau &\triangleq g_{H_1}^\tau\circ g_{H_2}^\tau\circ\cdots\circ g_{H_s}^\tau,\\ \check{G}_1^\tau &\triangleq g_{H_s}^\tau\circ g_{H_{s-1}}^\tau\circ\cdots\circ g_{H_1}^\tau,\end{aligned} \tag{14}$$

均为一阶显辛算法 [14] 。按照上述辛算法的构成方法，我们可以构造出高阶显式辛算法。

4 显辛算法的形式积分存在性

由 BCH 公式[11]可知，两个不可交换微分算子 X, Y 的指数函数的“乘积”可用一个新算子 Z 的指数函数来表示，即

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(Z) \tag{15}$$

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}(XY - YX) + \cdots. \tag{16}$$

对于 1 阶辛算法 $G_1^\tau, X = \tau D_T, Y = \tau D_V$，则由 (15) 和 (16) 式有

$$\exp(\tau D_T)\exp(\tau D_V) = \exp(\tau \overline{D}), \tag{17}$$

$\overline{D}$ 由 (16) 式确定，它为 τ 的幂级数，其系数是 D_T 和 D_V 的函数。如果微分算子 $\overline{D}$ 能由某个函数 $\widetilde{H}(p,q,\tau)$ 的 Poisson 括号产生，则 $\widetilde{H}(p,q,\tau) = \widetilde{h}$ 便为 G_1^τ 的一个形式积分。若令

$$\widetilde{H}(p,q,\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} H_j(p,q), \quad H_0(p,q) = H(p,q), \tag{18}$$

则由

$$G_1^\tau \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \exp\left[\tau D_{\widetilde{H}(p,q,\tau)}\right] \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}, \tag{19}$$

两边按 τ 的幂次展开，得

$$\begin{pmatrix} p_n - \tau \partial v(q_n)/\partial q_n \\ q_n + \tau \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!}(-1)^i \left[\partial^{i+1} T(p_n)/\partial p_n^{i+1}\right] \left[\partial v(q_n)/\partial q_n\right]^i \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!} \begin{pmatrix} p_n^{(i)} \\ q_n^{(i)} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

(20) 式右端中的 $p_n^{(i)}, q_n^{(i)}$ 可用类似 Deprit 方法[15]递推给出[16]，它们为 $H_j(p_n, q_n)$ 的函数。这样比较 (20) 式两端 τ 的同次幂系数，可以解出 $H_j(j = 1, 2, \cdots)$[16]。所以 $\widetilde{H}(p,q,\tau)$ 是存在的。

对于 $2k$ 阶显式辛算法，由其对时间的可逆性可以证明 $\widetilde{H}(p,q,\tau)$ 的形式为[17]

$$\widetilde{H}(p,q,\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j}}{(2j)!} H_{2j}(p,q). \tag{21}$$

另一方面，若原系统存在一孤立的解析积分 $F(p,q) = C, C$ 为积分常数，那么对于辛算法是否也存在相对应的孤立积分呢？若令

$$\widetilde{F}(p,q,\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} F_j(p,q), \quad F_0(p,q) = F(p,q), \tag{22}$$

在 $\exp[\tau D_{\widetilde{H}(p,q,\tau)}]$ 作用下守恒，则应有

$$\{\widetilde{F}, \widetilde{H}\} = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} F_j(p,q), \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} H_j(p,q) \right\} \equiv 0. \tag{23}$$

比较 τ 的同次幂系数有

$$\{F_j, H_0\} = f(F_0, F_1, \cdots, F_{j-1}; H_0, H_1, \cdots, H_j), \tag{24}$$

其中 f 为已知函数，由此一阶拟线性偏微分方程解出 $F_j(j=1,2,\cdots)$，则 $\widetilde{F}(p,q,\tau)$ 便确定了，这说明辛算法也存在对应于 $F(p,q)=C$ 的积分 $\widetilde{F}(p,q,\tau)=\widetilde{C}$, $\widetilde{C}$ 是常数。数值计算结果表明 [18]，辛算法下，积分 $F(p,q)=C$ 与能量积分一样没有长期变化。特别是，对 N 体问题的 10 个经典积分，除能量积分外，其他 9 个积分在辛算法下被严格保持了 (与步长 τ 无关)[18]。

5 其他一些辛算法

广义地说，第三节给出的辛算法首先是对动力系统的矢量场进行分解，然后将每个矢量场的流采用一定的方法进行复合才得到的，这与传统的数值方法建立思想是完全不同的，但如果在传统算法的建立中加入辛条件，我们能否建立与传统方法相类似的辛算法呢？下面对此问题作一简要介绍。

5.1 辛 Runge–Kutta 方法

传统的 Runge–Kutta 方法的差分格式为

$$\begin{cases} z_{k+1} &= z_k + \tau \sum_{i=1}^{s} b_i f(y^i) \\ y^i &= z_k + \tau \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(y^j), \quad 1 \le i \le s. \end{cases} \tag{25}$$

使 (25) 式保辛的充要条件等价于 [19]

$$b_i b_j - b_i a_{ij} - b_j a_{ji} = 0. \tag{26}$$

对于一定阶的显格式，应有 $a_{ij}(i \le j) = 0$, 则上式变为

$$b_i = a_{ji}, \tag{27}$$

由此导出

$$b_s = a_{ss} = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots). \tag{28}$$

这说明无法构成显格式。对于保辛的 Runge–Kutta 方法一般来说至少是对角隐的 [19]。

5.2 显式辛 Runge–Kutta–Nyström 方法

若 Hamilton 系统中动能部分形式为

$$T(p) = \frac{1}{2} p^T p, \tag{29}$$

则此 Hamilton 系统可直接用二阶微分方程表示：

$$\ddot{q} = f(q) \tag{30}$$

显 RKN 方法的差分格式为

$$\left\{\begin{array}{lll} q_{k+1} & = & q_k + \tau\dot{q}_k + \tau^2\sum_{i=1}^{s}\overline{b_i}f(q^i), \\ \dot{q}_{k+1} & = & \dot{q}_k + \tau\sum_{i=1}^{s}b_i f(q^i), \\ q^i & = & q_k + C_i\tau\dot{q}_k + \tau^2\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}f(q^j), \end{array}\right. \tag{31}$$

要求 (31) 式保辛的条件是 [20−21]

$$\left\{\begin{array}{llll} \overline{b_i} & = & b_i(1-C_i), & 1\le i\le s, \\ a_{ij} & = & b_j(C_i-C_j), & j<i. \end{array}\right. \tag{32}$$

文献 [20] 和 [21] 分别给出了 3 步 4 阶和 5 步 5 阶、 7 步 6 阶辛 RKN 方法的系数 b_i 和 C_i 。

对于 Hamilton 系统，辛 RKN 方法也使能量没有长期变化，计算时间也优于 RK 和 RKN 方法 [22] 。

5.3 线性辛多步法

对于一阶常微分方程，线性多步法可表为

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i x_{n+i} = \tau\sum_{i=0}^{k}\beta_i f_{n+i}, \tag{33}$$

其中 f_{n+i} 为第 $n+i$ 步的右函数值。其特征多项式记为

$$\rho(\xi)=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\xi^i, \qquad \sigma(\xi)=\sum_{i=0}^{k}\beta_i\xi^i. \tag{34}$$

冯康在研究代数函数逼近问题时证明下述结论 [23]:

(1) 若记 $\psi(\xi)=\rho(\xi)/\sigma(\xi)$，则线性多步法 (33) 对线性 Hamilton 系统是辛的充要条件为：$\psi(\xi)=-\psi(\frac{1}{\xi})$ 。

(2) 设 $\rho(\xi)$ 与 $\sigma(\xi)$ 没有共因子， $\psi(\xi)=-\psi(\frac{1}{\xi})$ 的充要条件是： $\rho(\xi)$ 是反对称的， $\sigma(\xi)$ 是对称的。

由此可以建立各阶显式或隐式线性辛多步法。但当线性多步法用于非线性 Hamilton 系统时，表现出了强烈的数值不稳定性，其原因是稳定区间只存在于虚轴上，而且没有相对稳定区域 [24] 。

还有其他一些类型的辛算法，比如用生成函数形成的辛算法，详情见文献 [25] 。

6 线性对称多步法

下述二阶常微分方程

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \tag{35}$$

的理论解是周期函数。当用传统的 Störmer 方法

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{n+j} = -\tau^2\omega_0^2\sum_{j=0}^{k}\beta_j x_{n+j} \tag{36}$$

求解时，一般得到下列形式解

$$x_n = x_0\exp(in\tau\omega). \tag{37}$$

这里 $|\omega|$ 近似于 ω_0，但一般来说 ω 是虚的，因为将 (37) 式化入 (36) 式有

$$\tau^2\omega_0^2 = -\left[\alpha_k\exp(k\cdot i\omega\tau)+\cdots+\alpha_0\exp(0\cdot i\omega\tau)\right]/\left[\beta_k\exp(k\cdot i\omega\tau)+\cdots+\beta_0\exp(0\cdot i\omega\tau)\right], \tag{38}$$

这里 $i=\sqrt{-1}$ 。$\tau^2\omega_0^2$ 是实的，故对于一般的 α_j,β_j,ω 不能是实数，否则 (38) 式两端不等。但对于一些特殊的 α_j,β_j,ω 可以是实的。Lambert 和 Watson 证明了 [26] 使 ω 为实数收敛的线性多步法 (36) 必须满足：

$$\alpha_j=\alpha_{k-j},\quad \beta_j=\beta_{k-j},\quad j=0,\quad \cdots,k, \tag{39}$$

且 k 为偶数。这样特征多项式 $\rho(\xi)$ 和 $\sigma(\xi)$ 均为对称的 (symmetric)，由此形成的多步法就是对称方法。Lambert 和 Watson 建立了 2, 4 和 6 阶显式对称多步法 [26]；Quinlan 和 Tremaine 于 1990 年又建立了 10, 12 和 14 阶显式算法 [8]，并在这些算法中加入了减少舍入误差的 ADD 方法 [27]。

对称算法对周期系统给出的解是周期的，因为 ω 是实的；而传统的 Störmer 方法给出的解是非周期的，因为 ω 是虚的，其虚部使轨道随时间不断地向内或向外盘旋，这就导致系统的能量有长期变化，对称算法恰好克服了这一不足。Kinoshita 和 Nakai 从理论上证明了对称算法使 Hamilton 系统的能量没有长期变化 [28]。

7　应用情况与展望

由于辛算法和对称算法均使 Hamilton 系统的能量没有长期变化。因而受到了动力天文研究者的重视，并已将其应用到具体的研究工作中 [29–35]，特别是在目前动力天文的热点课题之一 (太阳系长期动力演化) 中。Wisdom[33] 将 N 体问题用 Jacobi 坐标系表示，得到如下形式的 Hamilton 函数

$$H(p,q)=\sum_{i=1}^{N-1}H_i(p,q)+\varepsilon\Delta H(p,q), \tag{40}$$

其中，$H_i(p,q)$ 为二体问题 Hamilton 函数，ε 是小参数。按照 (40) 式的分解，可构造各阶显式辛算法，且截断误差比按动能与势能分解后形成的辛算法小 ε 量级。经比较发现，按 (40) 式分解后形成的 2 阶辛算法 (或辛映射) 在太阳系动力演化中是最具效力的数值方法之一 [33]。辛算法使系统的能量只有周期变化，从而使系统中近点角误差随时间呈线性变化，并使系统中的共振对得以长时间的保持 [33]，但与同阶传统算法相比，辛算法的截断误差要大。

如果一个 Hamilton 系统具有小耗散扰动，辛算法仍然有效 [7]。

需要指出的是存在一个特别的步长，对称算法表现了数值不稳定性 [36]，对此现象可用共振原理加以解释。实际应用中这种情况可以通过取其他步长得以解决。

随着计算机的发展，对数值方法要求越来越高，在要求具有高精度的同时，还要求能保持原系统的某些性质。这种要求是合理的，辛算法正是符合了这种要求，所以取得了良好的

效果。辛算法的建立对 Hamilton 系统的研究将带来重大影响。比如对动力系统中的著名的标准映射 (standard mapping)[37] ：

$$\begin{cases} P = p + K\sin q, \\ Q = q + P. \end{cases} \tag{41}$$

事实上，它就是对具有下述 Hamilton 函数的系统的一阶辛算法，

$$H_0(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + \cos q. \tag{42}$$

只要作变换 $\tau = \sqrt{K}$, $p = \tau\overline{p}$，便有

$$\begin{cases} \overline{P} = \overline{p} + \tau\sin q, \\ Q = q + \tau\overline{P}. \end{cases} \tag{43}$$

由前面的讨论知，这一阶辛算法存在形式积分

$$\widetilde{H}(p,q,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} H_n(p,q) = \widetilde{h}. \tag{44}$$

此积分的存在为研究标准映射提供了一条途径。

辛算法以及对称算法，在动力天文的研究中将会越来越显示它们的生命力。

参 考 文 献

[1] 黄天衣，丁 华. 天文学报， 1981, 22: 328
[2] 刘 林，廖新浩. 天文学报， 1987, 28: 215
[3] Liu Lin, Liao Xinhao. Celest. Mech. Dyn. Astron., 1994, 59: 221
[4] Liu Lin, Liao Xinhao. Celest. Mech. Dyn. Astron., submitted
[5] Kinoshita H et al. Celest. Mech., 1991, 52: 59
[6] 赵长印，廖新浩，刘 林. 天文学报， 1992, 33: 36
[7] 刘 林等. 天文学报， 1994, 35: 51
[8] Quinlan G D, Tremaine S. A. J., 1900, 100: 1694
[9] Arnold V I. Mathmatical method of classical mechanics. New York: Springer, 1978
[10] Feng Kang. In: Feng Kang ed. Proc. 1984 Beijing symp. diff. geometry and diff. equations. Beijing: Science Press, 1985: 42
[11] Varadarajan V S. Lie group, lie algebras and their representation. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1974
[12] Yoshida H. Phys. Letters A, 1990, 150: 262
[13] Ruth R D. IEEE Trans. on Nucl. Sci., 1983, NS-30: 2669
[14] Feng Kang. In: Feng Kang ed. Proc. of inter. conf. on scientific computation, Hangzhou, 1991, Singapore: World Scientific, 1992: 1
[15] Deprit A. Celest. Mech., 1969, 1: 12
[16] Liao Xinhao, Liu Lin. Celest. Mech. Dyn. Astron., 1996, 64(1): 11
[17] Yoshida H. Celest. Mech. Dyn. Astron., 1993, 56NS-2: 27
[18] Liao Xinhao, Liu Lin. In: Cui Junzhi ed. Proc. conf. scientific and engineering computing for young Chinese scientists, Beijing: National Defence Industry Press, 1994: 46
[19] Qin Mengzhao, Zhang Meiqing. J. Comput. Math., 1992, Supplement Issue: 215
[20] Qin Mengzhao, Zhu Wenjin. Comput Math. Applic., 1991, 10: 85

[21] Okunbor D I, Skeel R D. Math. Comput., in press
[22] 顾斌铨，刘　林. 人造卫星观测与研究，1994, 33: 1
[23] Feng Kang. In: Feng Kang ed. Proc. of the annual meeting on comp. math., Tianjing, 1989, Tianjing: Nankai Univerisity, 1990: 1
[24] 赵长印，王昌彬，黄天衣. 紫金山天文台台刊，1995, 14: 20
[25] Feng Kang. In: Shi Zhongci ed. Proc. inter. conf. on comput of diff. eq. and dynamical systems, Beijing, 1992, Singapore: World Scientific, 1993: 1
[26] Lambert D, Watson I A. J. Inst. Math. Applic., 1976, 18: 189
[27] Quinn T, Tremaine S. A. J., 1990, 99: 1016
[28] Kinoshita H, Nakai H. In: Ferraz-Mello ed. Chaos. resonance and collective dynamical phenomena in the solar system, Netherlands: [s.n.], 1992. 395
[29] 廖新浩，刘　林. 计算物理，1994, 11: 212
[30] 廖新浩，刘　林. 计算物理，1995, 12: 125
[31] 廖新浩，刘　林. 天文学报，1993, 34: 198
[32] Zhao Zhangyin, Liu Lin. Icarus, 1992, 100: 1528
[33] Wisdom J, Holman M. A. J., 1991, 102: 1528
[34] Sussman G J, Wisdom J. Science, 1992, 257: 56
[35] Wisdom J, Holman M. A. J., 1992, 104: 2022
[36] Quinn T R *et al.* A. J., 1991, 101: 2287
[37] Chirikov B V. Phys. Rep., 1997, 52: 263

（责任编辑　刘金铭）

New Methods for Numerical Computations of Hamiltonian Systems

Liao Xinhao Liu Lin
(*Astronomy Department, Nanjing University, Nanjing* 210093)

Abstract

In this paper, the symplectic algorithms and linear symmetric multistep methods which are established for numerical computations of Hamiltonian systems in recent years are described, and the applications of them to dynamical astronomy are reviewed briefly.

Key words celestial mechanics