

恒星演化晚期阶段研究中的 流体动力学计算方法

张锁春¹ 王贻仁¹ 汪惟中² 谢佐恒¹

(1. 中国科学院应用数学研究所 北京 100080)

(2. 北京医科大学计算中心 北京 100083)

摘 要

综述了数值模拟恒星演化晚期阶段所使用的流体动力学计算方法和程序等方面的情况以及研究现状。

关键词 流体动力学 — 恒星演化 — 方法: 数值

1 概 述

文中所述的流体动力学计算方法, 仅局限于应用到恒星演化的晚期阶段——即恒星坍缩, 超新星爆发以及爆发后过程的运动。

自从本世纪40年代中期电子计算机问世以来, 人类首先实现了原子弹的理论设计的计算机模拟, 完全证实了可控热核反应的数值模拟方法是切实可行的。50年代后期, 原在美国洛斯·阿拉莫斯(Los Alamos)和劳伦斯·利物莫尔(Lawrence Livermore)国家实验室的部分研究人员转向天体物理研究, 与天文学家、天体物理学家一道探索宇宙起源的奥秘, 很自然地将在原在核武器研制过程中使用的一些计算方法, 譬如解一维流体动力学方程组的 von Neumann 差分方法和使用人为粘性处理激波间断的技巧等, 针对天体物理研究中遇到的新问题加以改造和发展, 推广应用到恒星的脉动、演化、坍缩、爆炸等问题的研究中, 开创了现代计算天体物理学(Computational Astrophysics), 亦称数值天体物理学(Numerical Astrophysics)。整个60—70年代是数值天体物理学迅速发展时期, 取得了许多重要结果, 使人们充分地认识到, 数值模拟是深入了解天体物理现象必不可缺少的研究手段。

从计算方法的研究和计算程序的编制角度来看, 60—70年代主要工作集中在一维流体力学程序编制和计算上, 探讨的物理问题主要围绕超新星坍缩和爆发机制。在70年代后期和整个80年代, 基本上集中在二维(少数三维)程序研制上, 研究的问题是旋转对轴对称模型的影响。SN 1987A事件的出现, 大大刺激了二维甚至三维计算工作的开展。其原因是, 通过

1994年7月3日收到 1995年2月13日收到修改稿

国家自然科学基金项目和国家攀登项目资助

观测 SN 1987A, 人们唯一地一次用实验装置逮住了中微子。中微子的发现、 ^{56}Ni 的合成总量 ($\sim 0.075M_{\odot}$) 和爆炸能量 ($\sim 1.4 \times 10^{51}\text{erg}$) 这三个参量, 可以作为“爆炸机制”最直接的检验器, 当然还有光变曲线、线性剖面等有价值的观测值。为了拟合这些数据, 必须围绕 SN 1987A 开展超新星的坍缩、爆炸及爆炸后运动中的关于瑞利-泰勒 (RT: Rayleigh-Taylor) 不稳定性、混合 (mixing)、碎片 (fragmentation)、结块 (clumping) 和热气泡 (hot bubble) 等问题的二维和三维研究。这对计算方法和使用的计算机, 都提出了更高的要求, 尽管美国等国家有了不同型号的超级计算机, 但是到目前为止, 还不能实现从恒星开始演化到爆炸以及爆炸后全过程的三维动态模拟。一般都是用一维球对称模型数值模拟恒星演化至坍缩中心, 之后再二维程序接着计算以后的过程。为验证二维计算结果的可靠性, 也完成了屈指可数的少数几个三维计算。这大概就是迄今为止恒星演化晚期阶段的流体动力学计算的基本现状。

大质量恒星演化到晚期, 由于重核光致裂解 (photodisintegration) (对 $M \geq 11M_{\odot}$ 恒星) 或 O-Ne-Mg 的重核电子俘获 (对 $8 \leq M \leq 11M_{\odot}$ 恒星), 使动力不稳定性发展起来, 导致星核区 ($1.3-1.8M_{\odot}$) 引力坍缩启动。坍缩启动之后, 随着中央星核区密度上升, 电子能量超过重核和自由质子俘获阈值时, 发生了产生中微子的反应, 这些中微子将携带能量自由泄漏。正是由于电子转变成中微子的反应, 使星核区简并电子压降低, 促使坍缩继续下去。当星核物质密度超过 $10^{11}\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ 时, 物质对中微子已不再是透明的了, 中微子被关闭在星核区内, 中微子虽对压强亦有贡献, 但不及电子那样有效, 坍缩直至核密度时才被遏止。超过核密度后, 中心发生反弹, 在离中心包含约 $0.8-0.9M_{\odot}$ 球面的声速点 (即物质坍缩速度与声速值相等之处) 上形成向外冲击波。如果冲击波有足够的能量克服传输途径上的能量损耗 (传给星幔和外壳能量达 $\sim 10^{51}\text{erg}$), 就会引起超新星的爆发, 这称为瞬发机制 (prompt mechanism)。如果冲击波能量不足以克服传输途径中的损耗, 冲击波有时前进有时后退, 持续时间较长, 则中央区形成中子星的过程中发射出大量的中微子, 将加热冲击波后物质, 使冲击波得以复活而发生爆炸, 这称为延缓机制 (delayed mechanism)。无论那种爆炸机制, 都涉及到各种物理因素 (包括前身星起始模型、致密物质物态方程、广义相对论效应、弱相互作用率和中微子反应截面等等)。至今各国的科学家在引力坍缩方面已基本上取得了共识, 但引力坍缩时释放出的引力能究竟是怎样转移到星幔和外壳上而引发爆炸的, 至今仍无定论。至于爆炸后的现象更是众说纷纭。这也是迄今为止关于超新星研究进展的基本状况。

2 约 定

为了叙述方便起见, 先引进一些术语和记号作为一种约定。下文中出现相同符号时不再另作说明。

众所周知, 考察流体运动有两种观点: 一种是 Lagrange 观点, 另一种是 Euler 观点。其计算方法按其采用的坐标系可分为拉格朗日 (L) 方法和欧拉 (E) 方法两大类, 当然也有 L-E 相结合或混合 (mixed) 的方法。在研究一维 (1D) 的天体物理问题时, 大都采用 L-形式的球对称模型 (SSM: spherically symmetric models), 取球壳内的质量为 L-坐标, 其好处是质量守恒会自动满足。流体力学方程组有牛顿 (即非相对论) (NR: non-relativistic) 和广义相对论 (GR: general theory of relativity) 形式之分。

要用电子计算机计算天体物理问题, 首先必须把连续问题作离散化处理变成离散问题。

现有的方法有: 有限差分法 (FDM: finite difference method)、有限单元法 (FEM: finite element method)、有限体积法 (FVM: finite volume method)、谱方法 (SM: spectral method) 和质点法 (PM: particle method)。

求解离散问题时所采用的数值技巧大致分为三种类型的方法: 一种是 von Neumann 差分方法 (V), 它对 L 或 E 皆适用, 其基本方法是对时间离散时使用交错格点 (staggered grids) 和用人为粘性 (Q) 捕获激波。常用的 Q 形式是 von Neumann-Richtmyer 形式 (V-R), 亦有其他形式。有的方法虽然没有明显地加上人为粘性的项, 但实际上却隐含着某些起粘性作用的项。第二种是 Godunov 方法 (G), 所有一阶和二阶方法仅用非交错网格的网格值, 而网格之间的流是利用适当的 Riemann 问题 (R) 的精确解来计算。现在流行的 G 方法大多数是显式的, 比如 GRP (generalized Riemann problem)^[111]、PPM (piecewise-parabolic method)^[100]、ENO (essentially non-oscillatory)^[112] 等格式, 不过 Fryxell 等人^[113] 曾对 1D-L 形式构造过隐式的 G 方法, 它是 PPM 的推广。第三种是 SPH (smoothed particle hydrodynamics) 方法。它属于 PM 范畴但又不同于一般的 PM, 它是一种新的 L 方法, 但由于能准确地计算空间梯度而不使用任何网格点, 从而避免了网格的缠结 (tangling) 和扭曲 (distortion) 等最头疼的问题。适合解决天体物理中遇到的许多问题。SPH 顾名思义, 将流体的运动看作组成流体的离散质点运动的组合效应, 它是由服从某种质点密度分布的质点质量 (即质点本身所携带的量) 所光滑化, 亦可看作是一种插值 (interpolation) 技巧。

3 一维球对称模型 (1D-SSM)

自从 Burbidge 等人 (1957^[1]) 研究铁核引力坍缩和 II 型超新星爆发的物理关系之后, 首先由 Colgate 和 Johnson (1960^[2]) 开始研究超新星的爆发机制, 他们使用的就是由 White 编制的带有引力修正项的 1D 流体力学计算程序^[3], 从而拉开了 1D-SSM 研究的帷幕。

(1) “CW66” (Colgate & White 1966^[4])

NR: 用的是 $V \oplus V - R$ 方法^[5,6], 所不同的是在动量守恒方程中带有引力场 (注: 符号 \oplus 数学上表示直交和)。

(2) “MW66” (May & White^[7,8])

GR: 用的是类似的 $V \oplus V - R$ 方法, 在解法上采用预估校正的循环迭代技巧。

(3) “A66” (Arnett^[9]) 和 “FA77” (Falk & Arnett^[10])

NR: 辐射输运 $\oplus V - R$, 能量方程求解是采用追赶法。

(4) “S67” (Schwartz^[11])

GR: 辐射输运 \oplus 类似的 $V - R$, 亦用追赶法求解能量方程。

(5) “W71” (Wilson^[12])

GR: 考虑中微子输运。对星体分 50 个空间区, 对中微子分 4 个角区, 对电子-中微子能量 (从 1—93 MeV) 分 14 个能区, 对 μ 介子-中微子能量 (从 10—640 MeV) 分 13 个能区。求解辐射差分方程组是一件相当复杂的事情。

(6) “WZW78” (Weaver, Zimmerman & Woosley^[13])

为了研究恒星的静态和动态的演化, 一个 1D-SSM 的隐式版本的计算程序——“KEPLER”, 自 1978 年开始, 先后经过 15 年的努力, 现已成为具有很详细处理核燃烧过程并有与时间相

关的对流与半对流功能的软件包^[14,15,16,21],已产生较为通用的FORTRAN77/UNIX的基本版本^[21],并能在现较为流行的以RISC为基础的工作站上高效地运行。

核反应是用两种不同的元素网来处理的:第一种是用19个元素(82种反应)网,可有效地产生核能产生率。从氢燃烧开始到静态的硅燃烧开始为止: ${}^1\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{14}\text{N}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{20}\text{Ne}$, ${}^{24}\text{Mg}$, ${}^{28}\text{Si}$, ${}^{32}\text{S}$, ${}^{36}\text{Ar}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{44}\text{Ti}$, ${}^{48}\text{Cr}$, ${}^{52}\text{Fe}$, ${}^{54}\text{Fe}$, ${}^{56}\text{Ni}$, 光子和中子。第二种是对更高的演化区 [$X({}^{16}\text{O}) = 4\%$], 用125-同位素的“中间媒体统计平衡”(ISE: intermediate statistical equilibrium)网去计算中子化和后继发生的硅燃烧,用149-同位素网去详细计算同位素的核合成。在这些网中每个核之间仅包括弱相互作用率^[16-18]和强的电磁作用率^[19],所包括的核物理的某些详细讨论见文献^[20]。状态方程是包括Coulomb修正效应的^[15],不考虑旋转和磁场,但在动量方程和能量方程中的 Q 取为:

$$Q \equiv \frac{4}{3} \eta_v r^4 \partial \left(\frac{u}{r} \right) / \partial r,$$

其中忽略容积粘性(bulk viscosity), η_v 为动力粘性系数:

$$\eta_v = \eta_r + \frac{3}{4} l_1 \rho c_s + \frac{3}{4} l_2^2 \rho (\max[0, -\nabla \cdot u])$$

这里 η_r 是真实的物理粘性系数, c_s 是声速, l_1, l_2 是可调参数, u 是速度, r 是球半径,后两项分别表示线性和二次粘性应力。

隐式方程组的解法是:(1)将不同的量都表示成独立变量 ρ (密度)、 T (温度)和 l (透明度)的方程;(2)线性化这些方程组,在一个 Δt 时间间隔内,用时间前差形式求解 ρ, T 和 l 的变化,其过程应包括计算 P (压强), ϵ (内能), S (熵)和 l 关于密度和温度的偏导数;(3)迭代求解,但其中的对流混合和核燃烧都采用显式计算,迭代进行到所有的非线性方程组皆满足误差要求为止,这个过程类似于Henyeey等人^[23]使用的拟静态松弛法。

一个典型的恒星演化计算是取 $\eta_r = 0$, $l_1 = 0.1\Delta r$, $l_2 = 2\Delta r$, Δr 是空间区域的局部大小。其主要序列从零年龄开始到铁核坍缩为止,大约需用500个可调整的质量区域,15000个时间步长,作 7×10^{12} 次浮点双精度运算。

(7) “B91”(Benz^[24])

NR:从一般的Navier-Stokes(NS)方程中的粘性项出发来定义粘性压。采用FVM来离散流体方程组,因而出现有面积效应的因子。

(8) “L93”(Eli Livne^[25])

NR:采用类似于V的隐式版本,但解非线性代数方程组时采用的是“拉格朗日压力松弛法”(LPR: Lagrangian pressure relaxation method)。

这里顺便指出,在中国,我们研究小组自1983年起开始对超新星爆发理论作模拟研究。首先从物理上改进了Bethe和Cooperstein等人的物态方程^[26-29],在此基础上独立自主地编制了NR和GR的流体力学计算程序“WHZZ87”^[26]和“WLYW89”^[28]。它们分别类似于“CW66”和“MW66”,但在很多处理细节上有独特之处。譬如说对中微子输运的近似处理,对GR的求解顺序、迭代方式和插值公式等皆有所不同。所取得的部分研究成果已经发表在文献^[26-30]。

4 二维轴对称旋转模型 (2D-ASRM: 2Daxially symmetric rotating models)

从事过流体动力学计算的人们都知道: 1D 流体运动中的质团是“有序”的, 因而 L-方法十分有效, 但到了 2D 流体运动, 其图像十分复杂, 很难构造出一种普适的格式, 这就是 2D 流体动力学计算方法因研究对象不同而出现各种各样的局面。2D 非定常可压缩理想流体力学计算方法的研究始于 50 年代中期。Kolsky^[31] 构造了第一个 2D-L 格式, 60 年代达到鼎盛时期, 发表了大量关于计算格式的文章, 并编制了许多计算程序。Harlow^[32] 曾编辑发表过一个 2D 流体力学计算方法评述性的目录, 列举了 100 多篇文献和几十种程序。其基本方法的介绍和应用可见 Alder 等人主编的《计算物理方法》丛书第 3 卷^[33] 和第 4 卷^[34]。在中国亦可见李德元等人编著的书^[35], 尤其是周毓麟院士为该书写的序言作了较综合的介绍, 系统地分析了各种方法的优缺点。

天体物理中的 2D 流体力学计算起步较晚, 始于 70 年代初, LeBlanc 和 Wilson^[36] 首先给出一个旋转磁化恒星坍缩的数值例子。SN 1987A 之前的绝大多数工作, 是研究在引力场中旋转对恒星坍缩和爆发的影响。其中代表性的工作可参阅 Wilson^[37-42], Bodenheimer 和 Tscharnuter^[43-53], Winkler^[54-56]、Tohline^[57-60]、Müller 和 Hillebrandt^[61-63] 等人的文章。现列举几个典型程序:

(1) Wilson 等人的“二维多重介质的 ALE (arbitrary Lagrangian-Eulerian) 网格计算程序^[42]”。其主要特点是在固定的欧拉网格中嵌入拉格朗日网格或者部分嵌入部分重新划分网格。重分的目的是为了消除拉格朗日网格的畸变。

(2) Bodenheimer 的“code(B)”和 Tscharnuter 的“code(T)”^[46]。这是两种完全不同的计算程序。code(B) 采用的是柱坐标 (s, z, φ) , 其中 z 为旋转轴, 对 s 和 z 方向皆用显式的有限差分格式, 是对守恒型的方程组建立的。而 code(T) 采用的是球坐标 (r, θ, φ) , 其中 θ 是对旋转轴度量的极角, 对 r 方向采用隐式的有限差分, 而对 θ 方向采用适当的 Legendre 多项式展开表达式, 常称为混合格式 (hybrid scheme), 是对非守恒型的方程组建立的。他们的工作为后继的系列工作奠定了良好的基础。

(3) Winkler 等人的“WH80s”程序^[56]。这是根据编码原理 (principles of coding), 基于直观的结构程序风格 (structured programming style) 而编制的程序包, 目的是解决牛顿辐射流体力学方程组, 采用隐式的活动网格 (adaptive-mesh) 技巧, 使用的分裂格式 (splitting schemes) 将高维问题化为一维问题, 使用人为张量粘性 (artificial tensor viscosity) 形式, 对对流项的数值处理根据精度要求采取三种不同的全隐式格式: 一种是 Donor cell, 它是 1 阶精度, 要求 3 点的差分算子; 一种是 van Leer 的隐式版本, 它是 2 阶精度, 单调迎风格式, 要求 5 点差分算子; 一种是 Woodward 的隐式版本 (PPM), 它是 3 阶精度, 对固定网格要求 7 点差分算子, 对活动网格要求 9 点差分算子。由于程序中加入了自引力、真实的 (realistic) 状态方程、不透明数据 (opacity data)、核能产生率和对流, 因而功能极强, 可应用于天体物理领域内诸多方面的问题。

5 超新星爆发期间的不稳定性及混合

较长时间以来,人们已认识到流体动力学的不稳定性将出现在块状星云的超新星爆发中。Falk 和 Arnett^[64] 首次提出流体动力学不稳定性在喷射物 (ejecta) 中, 尽管在相当晚期才出现。Chevalier^[65] 指出, 密度和压力的剖面产生在冲击波传播通过的星体包层 (envelope) 的尾迹 (wake)。在某些情况下也满足 RT 不稳定判据。Chevalier 和 Klein^[66] 在二维模拟中也证实了这一点。Weaver 和 Woosley^[67] 指出, RT 不稳定增长预计在核心区 (core) 和氢包层 (hydrogen envelope) 的交界面处, 因为那里熵 (和密度) 发生跳跃。Bandiera^[68] 进一步指出, 这种不稳定性将把化学元素聚合在一起产生作用。SN 1987A 事件的出现, 对此研究贯注了新的动力, 带来了球对称破缺和混合穿过壳面的一般信息 (如 HB92^[70])。与此同时, 计算机资源和计算技巧已发展到对真正的二维和三维爆炸模型能进行切实可行的计算阶段。第一个 3D 流体力学计算结果是由 NNM^[73] 用 SPH^[73-77] 程序于 1988 年得到的, 研究的是 II 型超新星的点爆炸 (point explosion) 问题, 其中假设激波传播是通过一个多方指数密度分布 (polytropic density distribution)。对这种理想情况, 他们发现混合占有的份额很小, 不足以解释观测到的现象。可是 Benz 和 Thielemann^[78] 用 SPH^[24,69-72] 程序重复计算发现, 不稳定性的发展非常灵敏地依赖于初始的爆炸。Benz 等人怀疑 NNM 发现的不稳定性可能是数值不稳定性引起的。相同的结论也被 Müller 等人^[79] 用 “PROMETHEUS” 程序^[79-84] 重复计算所证实, 而且是用几种不同的 2D 和 3D 程序计算得到的。其结果是对多方指数密度分布不出现不稳定性, 而对具有幂律指数的幂律密度分布出现 RT 不稳定性。具有高分辨力的 AFM^[80] 的 2D 计算, 对 II 型超新星的前身星 (progenitor) 用的是真实的密度分布, 发现有很强的 RT 不稳定性, 由它所引起的爆发后的混合在时间尺度上能持续数小时。Nomoto 等人针对 SN1987A 和 I 型超新星开展了 RT 不稳定性及混合等问题的研究^[85-87], 使用的是有限差分方法, 对 “14E1” 模型进行了 2D 和 3D 计算。Livne 等人^[88-90] 利用 2D-“VULCAN” 程序计算白矮星 (WD: white dwarfs) 的爆燃阵面 (deflagration fronts) 的不稳定性。最近 Herant 和 Woosley^[91] 利用 2D-SPH 程序来研究红超巨星中超新星爆发后的击波传播、混合和结块等现象, 充分利用质量分别为 12、15、25、30、35 M_{\odot} 和 40 M_{\odot} 的前身星演化到核心坍缩点的资料 (见 Weaver 和 Woosley^[92]), 各种情况都表明, 大块的 RT 不稳定性在反向激波尾部的喷射物中发展, 前身星的壳结构皆剥落成块状离开而混合成超新星遗迹 (remnant)。这些结论与 II 型超新星爆发机制无关。而 Hachisu 等人^[93] 独立的研究亦得到类似的结果。

现对计算中采用的程序和计算方法稍加说明:

(1) “14E1”——解的是 Euler 方程, 绝热指数 $\gamma = \frac{4}{3}$ 不变。HMNS90^[85] 采用的是二阶 Lax-Wendroff 格式^[94,95] 带有 Davis 的 TVD (total variation diminishing) 人为粘性^[96]。HMNS92^[87] 采用的是带有 TVD 人为粘性的三阶 Roe 格式^[97-99], 是在 Fujitsu · VP-400E 超级计算机上运行的 (其机运算速度大约是 Cray-2 机运算速度的 3 倍), 分点为 1025 × 1025, CPU 计时间为 2 小时, 分点为 1973 × 1973 时需 5 小时。

(2) “PROMETHEUS” 程序 (ARM89^[80], MFA90^[82], FMA91^[84]) 是在 Cray-2 超级计算机上运行的。解的是 Euler 流体力学方程组, 使用的是推广的 PPM 方法。PPM^[100,101] 是一种 Godunov 方法^[102], 它是对牛顿向量化的方程组建立显式的 Eulerian 格式, 对时间和空间皆具有 2 阶精度, 能自动地满足守恒性。

(3) “SPH”——自从 Lucy^[104] 描述 SPH 技巧以来, 由于 Gingold 和 Monaghan 等人^[105-110] 的努力, 奠定了 SPH 的基础, 由于天体物理问题研究的迫切需要, 大大推动了 SPH 的发展。原始的 SPH 是要计算空间导数的, NNM^[73] 使用的 SPH, 在解能量方程时用的是 PF (particle-and-force) 方法。再经过 Benz 等人 (B90^[24], HB91^[69], HBC92^[70]) 的完善和改进, 现在 SPH 已发展成为比较成熟的、能计算 2D 和 3D 天体物理问题的计算方法了。

(4) “VULCAN” 程序——这是由 Livne^[25] 提出的 2D-隐式方法。该方法由两步组成: 第一步是 von Neumann 的纯隐式 Lagrangian 步, 用 LPR 法解之; 第二步是高阶显式再映射步, 利用二阶单调线性插值 (原则上亦可用其他任意高阶单调方法, 如 PPM, 或 FCT (flux corrected transport))^[103], 将新的流场再映射成所希望的网格 (如欧拉网格或活动网格), 并将对流项从压缩项中分离出来。

总之, 到目前为止, 在天体物理领域内, 对恒星演化晚期阶段能进行 2D 和 3D 数值计算的, 只有美国、德国和日本等国家, 其中美国为最强。集中在劳伦斯·利弗莫尔国家实验室、洛斯·阿拉莫斯国家实验室、布鲁克·黑文国家实验室 (Brook Haven Nat. Lab.)、加州大学和利克 (Lick) 天文台、亚利桑那大学和斯图尔德 (Steward) 天文台等; 德国是马克斯·普朗克天体物理研究所 (Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik); 日本是东京大学和国家天文台。据我们所知, 在我国目前还不能进行这方面的计算。需要我们埋头苦干迎头赶上。

参 考 文 献

- [1] Burbidge E M, Burbidge G R, Fowler W A et al. Rev. Mod. Phys., 1957, 29: 547
- [2] Colgate S A, Johnson M H. Phys. Rev. Lett., 1960, 5: 235
- [3] Colgate S A, White R E. Univ. of California Lawrence Radiation Report, UCRL-7777, 1964
- [4] Colgate S A, White R E. Ap. J., 1966, 143: 626
- [5] Richtmyer R D. Difference methods for initial-value problems, 1st ed. New York: Interscience Publishers, 1957
- [6] Richtmyer R D, Morton K W. Difference methods for initial-value problems, 2nd ed. New York London Sydney: John Wiley & Sons. Inc., 1967
- [7] May M M, White R H. Phys. Rev., 1966, 141: 1232
- [8] May M M, White R H. In: Alder B, Frenback S, Rotenberg M eds. Methods in computational physics, Vol.7. New York: Academic Press, 1967. 219
- [9] Arnett D. Canad. J. Phys., 1966, 44: 2553
- [10] Falk, S. W, Arnett D. Ap. J. Suppl., 1977, 33: 515
- [11] Schwartz R A. Ann. Phys., 1967, 43: 42
- [12] Wilson J R. Ap. J., 1971, 163: 209
- [13] Weaver T A, Zimmerman G B, Woosley S E. Ap. J., 1978, 225: 1021
- [14] Weaver T A, Woosley S E, Fuller G M. In: Centralia J M, LeBlanc J M, Bowers R L eds. Numerical astrophysics. Boston: Jones & Bartlett, 1985. 374
- [15] Woosley S E, Weaver T A. Phys. Rep., 1988, 163: 79
- [16] Fuller G M, Fowler W A, Newman M. Ap. J. Suppl., 1980, 42: 447
- [17] Fuller G M, Fowler W A, Newman M. Ap. J. Suppl., 1980, 48: 279
- [18] Fuller G M, Fowler W A, Newman M. Ap. J. 1985, 293: 1
- [19] Caughlan G A, Folwer W A. (CF88), At. Data Nucl. Data Tables, 1988, 40: 238
- [20] Woosley S E, Hoffman R. Ap. J., 1992, 395: 202
- [21] Weaver T A, Woosley S E, Zimmerman G B. Kepler Users Manual, internal LLNL document, 1991
- [22] Weaver T A, Woosley S E. Phys. Rep., 1993, 227: 65
- [23] Henyey L G, Wilets L, Böhm K H et al. Ap. J., 1959, 129: 628

- [24] Benz W. In: deLoore C. ed. Late stages of stellar evolution and computational methods in astrophysical hydrodynamics. Berlin: Springer, 1991. 259
- [25] Eivne Eli. *Ap. J.*, 1993, 412: 634
- [26] 王贻仁, 黄维章, 张锁春等. 计算物理, 1987, 4: 317
- [27] 王贻仁, 黄维章, 张锁春等. 计算物理, 1987, 4: 329
- [28] 王贻仁, 李鸿, 姚进, 汪惟中. 计算物理, 1989, 6: 257
- [29] 王贻仁, 李鸿, 姚进, 汪惟中. 计算物理, 1990, 7: 321
- [30] 王贻仁, 姚进, 汪惟中. 计算物理, 1992, 9: 649
- [31] Kolsky H G. A method for the numerical solution of transient hydrodynamic shock problems in two space dimensions. Los Alamos Sci. Lab., Report LA-1867, 1955
- [32] Harlow F H. Numerical methods for fluid dynamics, and annotated bibliography. Los Alamos Sci. Lab., Report LA-4281, 1969
- [33] Alder B, Fernbach S, Rotenberg M eds. Methods in computational physics, Vol.3: Fundamental methods in hydrodynamics. New York: Academic Press Inc., 1964
- [34] Alder B, Fernbach S, Rotenberg M eds. Methods in computational physics, Vol.4: Application in hydrodynamics. New York: Academic Press Inc., 1965
- [35] 李德元等. 二维非定常流体力学数值方法. 北京: 科学出版社, 1987
- [36] LeBlane J M, Wilson J R. *Ap. J.*, 1970, 161: 541
- [37] Norman M, Wilson J R. *Ap. J.*, 1978, 224: 497
- [38] Norman M, Wilson J R, Barton R. *Ap. J.*, 1980, 239: 968
- [39] Smarr L, Wilson J R, Barton R et al. *Ap. J.*, 1981, 246: 515
- [40] Howend W, Wilson J R, Barton R. *Ap. J.*, 1981. 249: 302
- [41] Bowers R, Wilson J. *Ap. J. Suppl.*, 1982, 501: 115
- [42] Wilson J, LeBlane J, Haineback K et al. In: Centrella J M, LeBlane, J M. Bowers R L eds. Numerical astrophysics. Boston: Jones & Bartlett Publishes Inc., 1985
- [43] Black D C, Brodenheimer P. *Ap. J.*, 1975, 199: 619
- [44] Black D C, Brodenheimer P. *Ap. J.*, 1976, 206: 138
- [45] Bodenheimer P. *Ap. J.*, 1978, 224: 488
- [46] Bodenheimer P, Tscharnuter W. *Astron. Astrophys.*, 1979, 74: 288
- [47] Bodenheimer P, Woosley S E. *Ap. J.*, 1983, 269: 281
- [48] Appenzeller I, Tscharnuter W. *Astron. Astrophys.*, 1974, 30: 423
- [49] Tscharnuter W. *Astron. Astrophys.*, 1975, 39: 207
- [50] Fricke K J, Möllenhoff C, Tscharnuter W. *Astron. Astrophys.*, 1976, 47: 407
- [51] Tscharnuter W. *Moon Planets*, 1978, 19: 229
- [52] Tscharnuter W M, Winkler K H. Technical Report MPI/PAE-Astro 163, 1978 or *Computer Physical. Comm.* 1979, 18: 171
- [53] Rozyczka M, Tscharnuter W, Winkler K H et al. *Astron. Astrophys.*, 1980, 83: 118
- [54] Winkler K H. Technical Report MPI/PAE-Astro 90, 1976
- [55] Winkler K H. *Moon Planets*, 1978, 19: 237
- [56] Winkler K H, Norman M L eds. *Astrophysical radiation hydrodynamics*. Dordrecht: Reidel, 1986
- [57] Tohline J E. *Bull. Amer. Astron. Soc.*, 1977, 9: 566
- [58] Tohline J E. *Ap. J.*, 1980, 235: 866
- [59] Tohline J E. *Ap. J.*, 1980, 236: 160
- [60] Tohline J E, Schombert J M, Boss A P. *Space Sci. Rev.*, 1980, 27: 555
- [61] Müller E, Rozyczka M, Hillebrandt W. *Astron. Astrophys.*, 1980, 81: 288
- [62] Müller E, Hillebrandt W. *Astron. Astrophys.*, 1981, 103: 358
- [63] Müller E, Arnett W D. *Ap. J.*, 1986, 307: 619
- [64] Falk S W, Arnett W D. *Ap. J.*, 1973, 180: L65
- [65] Chevalier R A. *Ap. J.*, 1976, 207: 872
- [66] Chevalier R A, Klein R I. *Ap. J.*, 1978, 219: 994

- [67] Weaver T A, Woosley S E. In: Meyerott R, Gillespie G H eds. *Supernovae spectra*, AIP: conference proceedings No.63, New York: AIP, 1980
- [68] Bandiera R. *Astron. Astrophys.* 1984, 139: 368
- [69] Herant M, Benz W (HB91). *Ap. J.*, 1991, 370: L81
- [70] Herant M, Benz W (HB92). *Ap. J.*, 1992, 387: 294
- [71] Herant M, Benz W, Colgate S. (HBC), *Ap. J.*, 1992, 395: 640
- [72] Benz W. *Comput. Phys. Comm.*, 1988, 48: 97
- [73] Nagasawa M, Nakamura T, Miyama S M. (NNM), *Publ. Astron. Soc. Japan*, 1988, 40: 691
- [74] Miyama S M, Hayashi C, Narita S. *Ap. J.*, 1984, 279: 621
- [75] Nagasawa M, Miyama S M. *Prog. Theor. Phys.*, 1987, 78: 1250
- [76] Nakamura T, Yamada Y, Sato H. *Prog. Theor. Phys.*, 1987, 78: 1065
- [77] Yamada Y, Nakamura T. In: Woosley S E ed. *Supernovae*. New York: Springer-Verlag, 1991. 229
- [78] Berz W, Thielemann F K. *Ap. J.*, 1990, 348: L17
- [79] Müller E, Hillebrandt W, Orio M *et al.* *Astron. Astrophys.* 1989, 220: 167
- [80] Arnett D, Fryxell B, Müller E (AFM). *Ap. J., Lett.*, 1989, 341: L63
- [81] Fryxell B, Müller E, Arnett D. In: Woodward P R ed. *Numerical methods in astrophysics*. New York: Academic Press, 1989
- [82] Müller E, Fryxell B A, Arnett W D (MFA), In: Ferrini F, Matteucci F, Franco J eds. *The chemical and dynamical evolution of galaxies*. Pisa: Casa Editrice Giardini, 1990
- [83] Arnett D, Fryxell B, Müller E. In: Woosley S E ed. *Supernovae*. New York: Springer-Verlag, 1991
- [84] Fryxell B, Arnett D, Müller E. (FAM). *Ap. J.*, 1991, 367: 619
- [85] Hachisu I, Matsuda T, Nomoto K *et al.* (HMNS90). *Ap. J.*, 1990, 358: L57
- [86] Hachisu I, Matsuda T, Nomoto K *et al.* *Ap. J.*, 1991, 368: L27
- [87] Hachisu I, Matsuda T, Nomoto K *et al.* *Ap. J.*, 1992, 390: 230
- [88] Livne E. *Ap. J.*, 1993, 406: L20
- [89] Livne E. *Ap. J.*, 1993, 412: 634
- [90] Livne E, Arnett D. *Ap. J.*, 1993, 415: L107
- [91] Herant M, Woosley S E. *Ap. J.*, 1994, 425: 814
- [92] Weaver T A, Woosley S E. *Phys. Rep.*, 1993, 227: 65
- [93] Hachisu I, Matsuda T, Nomoto K *et al.* *Astron. Astrophys. Suppl.*, 1994, 104: 341
- [94] Lax P D, Wendroff B. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960, 13: 217
- [95] Lax P D, Wendroff B. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1964, 17: 381
- [96] Davis S F. NASA Contractor Report 172373, ICASE Report No. 84-20
- [97] Roe P L. *J. Comput. Phys.*, 1981, 43: 357
- [98] Chakravarthy S R, Osher S. AIAA, 85-0363
- [99] Buchler J R ed. *The numerical modelling of nonlinear stellar pulsations*. Dordrecht: Kluwer, 1990
- [100] Colella P, Woodward P R. *J. Comput. Phys.*, 1984, 54: 174
- [101] Woodward P R, Colella P. *J. Comput. Phys.*, 1984, 54: 115
- [102] Godunov S K. *Nat. Sb.*, 1959, 47: 271
- [103] Boris J P, Book D L. *J. Comput. Phys.*, 1973, 11: 38
- [104] Lucy L. *Ap. J.*, 1977, 82: 1013
- [105] Gingold R A, Monaghan J. J., *M.N.R.A.S.*, 1977, 181: 375
- [106] Gingold R A, Monaghan J J. *J. Comput. Phys.*, 1982, 46: 429
- [107] Monaghan J J. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1982, 3: 422
- [108] Monaghan J J. *Comput. Phys. Rep.*, 1985, 3: 71
- [109] Monaghan J J, Gingold R A. *J. Comput. Phys.*, 1983, 52: 374
- [110] Monaghan J J, Lattanzio J C. *Astron. Astrophys.*, 1985, 149: 135
- [111] Ben Artzi M, Falcovitz J. *J. Comput. Phys.*, 1984, 55: 1
- [112] Harten A. *J. Comput. Phys.*, 1983, 49: 357

[113] Fryxell B A, Woodward P R, Colella P et al. J. Comput. Phys., 1986, 63: 253

(责任编辑 刘金铭)

Computational Methods of Fluid Dynamics in the Study of Late Stages of Stellar Evolution

Zhang Suochun¹ Wang Yiren¹ Wang Weizhong² Xie Zuoheng¹

(1. Institute of Applied Mathematics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

(2. Computer Centre, Beijing Medical University, Beijing 100083)

Abstract

The computational methods and current situation of fluid dynamics in the study of the late stages of the stellar evolution are presented in this review.

Key words hydrodynamics—stars: evolution—methods: numerical