

# 小波变换及其在天文地球动力学中的应用

顾 震 年 王 广 利

(中国科学院上海天文台 上海 200030)

摘 要

小波变换是近几年来国际上流行的一种新的数学分析方法。近年来在天文学和天文地球动力学领域中得到广泛的应用。文中对连续小波的概况、原理、有关技术及其在天文地球动力学中的应用作了简单而系统的介绍。

关键词 方法：分析—地球

## 1 引 言

小波变换分析是近几年在自然科学和技术科学领域中广泛应用的一种数学分析方法，它在信噪分离、图像处理、语言分析及模型识别等应用领域中是一种强有力的数学工具。小波变换同样被应用在天文地球动力学领域中。由于它具有时频局部化的特性，因此它可为各种地球物理现象之间的联系和动力学行为的演化提供直观的结构图像。文中对小波变换的特点及一般应用进展作了阐述，并介绍了它在地球动力学中的最新应用，特别是它为研究地球自转提供了新的数学手段。

## 2 小波变换分析的进展

小波变换分析最初是由法国地球物理学家 Morlet<sup>[1]</sup> 在分析地震波的高频成分时引进的。他发现传统的 Fourier 变换难以达到时间局部化，因此他引入小波概念对信号进行分解，以后理论物理学家 Grossman<sup>[2]</sup> 对此作了进一步的研究，为小波分析奠定了基础。Mallat<sup>[3]</sup> 将视觉领域多尺度分析引入到小波分析中，并已成功地应用于图像重建或数据压缩中。Gambis<sup>[4]</sup> 和 Chao<sup>[5]</sup> 分别将小波变换运用于地球动力学中并取得了较为满意的结果。

小波变换作为时间和频率的函数，它使我们得到信号周期随时间演化的过程。它的基本原理<sup>[6-8]</sup> 是将信号投影到一组基本函数族上，而这些函数通过一个简单的基本函数的平移和伸缩而得到。这函数称为分析小波。若给定一信号  $s(t)$ ,  $s(t) \in L^2(R, dt)$ ,  $L^2(R, dt)$  表示  $(R, dt)$  上勒贝格平方可积函数集。 $s(t)$  是  $(R, dt)$  上实值可测函数。若它属于  $L^2$  可积函数时，则可

写为  $s(t) \in L^2(R, dt)$ ,  $R$  为实平面,  $t$  为时间坐标。这时它的连续小波变换可表示为:

$$\begin{aligned} S(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) g_{a,b}(t) dt \\ g_{a,b}(t) &= c \cdot g\left(\frac{t-b}{a}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

更确切地说, 一个信号  $s(t)$  的连续小波变换就是信号与伸缩平移并旋转后的小波卷积。 $g(t)$  是分析小波或称母小波。分析小波  $g(t)$  经过平移或伸缩而得到小波函数族  $g_{a,b}(t)$ , 其成员具有形状大小相似的性质。公式中  $a > 0$ , 是伸缩标度参数,  $b$  是平移的时间参数, 属于实数集用  $b \in R$  来表示;  $c$  是归一化因子, 当分析的信号为低频变化时, 取  $c = 1$ ; 反之, 则取  $c = 1/\sqrt{a}$ 。也就是说系数  $S(a, b)$  仅在  $(a, b)$  区间上取适当值时, 伸缩与平移的连续小波才与信号相匹配。分析小波  $g(t)$  是具有均值为零的时频局部化的函数。因此, 小波分析是局部时段空间分析。另外, 分析小波  $g(t)$  必须满足以下条件:

(1)  $g(t) \in L^2(R, dt)$ , 这就是  $g(t)$  为勒贝格平方可积函数。它属于  $L^2$  的度量空间。 $g(t)$  在时间上是较好局部化的, 而它的 Fourier 变换  $\hat{g}$  在频率域上也是很好地局部化的。

(2)  $\hat{g}(\omega)$  是实数, 并满足

$$\int \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2)$$

如  $\hat{g}(\omega)$  满足后一个条件, 立即得到  $\hat{g}(0) = 0$ 。小波分析在高频处即小尺度上更有效, 即具有“变焦”特性。这一特性决定了它在突变信号处理上的作用。其中  $\hat{g}$  叫做允许小波, 而后一个条件被称为允许条件。允许小波一定是基本小波。它的重要特点就是能检测某一信号中的连续点。此外, 若信号  $s(t)$  在  $t$  处连续, 也就是  $s(t) \rightarrow S(a, b)$  变换是可逆的。它在每一步长上都可能恢复信号, 则信号  $s(t)$  由  $S_{a,b} g_{a,b}/a^2$  重新构成, 可表示为:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{a,b} g_{a,b} \frac{da db}{a^2} \quad (3)$$

小波变换  $S_{a,b}$  作为系数。

目前有几种分析小波用于不同的研究领域中。最普通的有下列两种连续小波 (见图 1):

(1) 二维 Mexican hat (墨西哥帽型): 它是简单的高斯型拉普拉斯各向同性的函数, 其通式为:

$$\psi_H(\mathbf{x}) = (2 - |\mathbf{x}|^2) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2} \quad (4)$$

这是一个实数的旋转不变的分析小波。式中  $\psi_H$  即是分析小波,  $\mathbf{x}$  为空间及时间向量。它像一个二阶算子作用并能探测信号所有方向的奇异性。因此 Mexican hat 对精细分析有效, 但对方向检测不适用。

(2) 二维 Morlet: 这是一个定向小波的原型, 表达式为:

$$\psi(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{x}) \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}' A \mathbf{x})\right] + \text{corr.} \quad (5)$$

参数  $\mathbf{K}_0 \in R^2$  是平面波的波矢量 (空间频率),  $A$  是  $2 \times 2$  正定矩阵,  $\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{x} \in R^2$  是属于实平面集上的空间位置, 式中改正项 corr. 保证  $\psi$  满足允许条件  $\hat{\psi}(0) = 0$ 。如  $|\mathbf{K}_0|$  选择足够大, 典型为  $|\mathbf{K}_0| \geq 6$ , 这项改正可忽略。然而对  $A = I$ , 我们得到:

$$\psi_E(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{x}) \exp\left[-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2\right] \quad (6)$$

这在图像处理中是已知的 Gabor 函数。小波  $\psi_E$  的模为高斯型分布, 而它的位相在沿与  $K_0$  相垂直方向都为常数。这样  $\psi_E$  的所有方向都包括在它的位相中。这对方向特性研究是很有用的。因为它可测定在与  $K_0$  相垂直方向上的跃变。角度选择性随  $|K_0|$  而增加。有些文献还提出其他一些小波(或滤波), 如 DOG 或高斯差分滤波, 这在视觉心理分析中更多采用。也有人把 Morlet 小波适当组合而得到不同方向选择小波, 这里就不再一一介绍了。

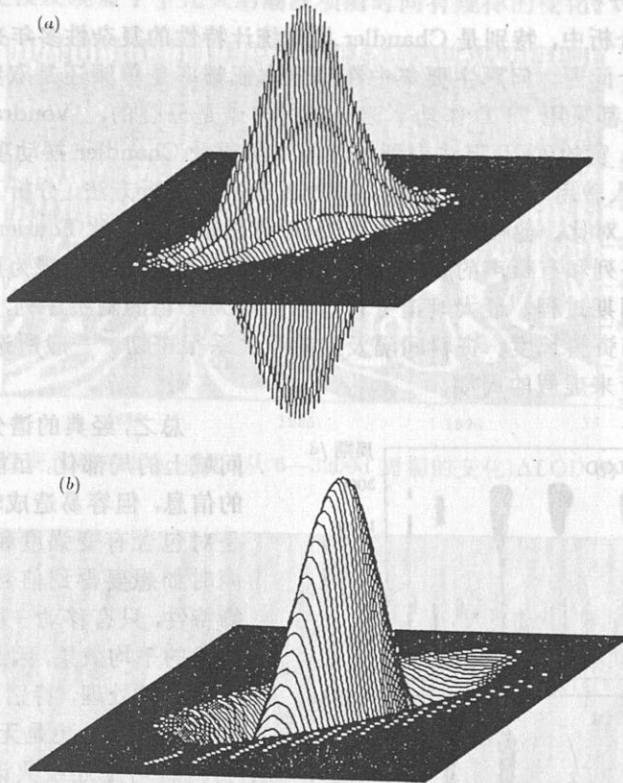


图 1 (a) Mexican hat 小波; (b) Morlet 小波<sup>[6]</sup>

### 3 小波变换在天文地球动力学中应用

最近 20 年间, 随着空间测地技术和高空大气测量技术的发展, 使观测资料的精度提高了 2—3 个数量级。这使地球自转速率变化、极移、章动、大地构造运动、地壳形变、核幔相互作用、大气和固体地球间角动量交换等研究成为当前地球动力学领域中相互交叉的前沿学科, 并取得了长足的进展。在研究这些课题中, 从观测序列中分析出隐含的周期信号是主要的手段之一。在以前几十年中, 传统的数据处理方法得到了广泛的应用。其中卓有成效的是快速 Fourier 变换、最大熵谱分析、最大似然法、相关函数法。用这些方法分析观测资料发现了不少新的现象, 但这些经典分析方法有许多不足之处, 本文中将对这方面先作简要综述。

#### (1) 对日长和大气角动量在不同时间尺度上检测

Rosen<sup>[9]</sup> 等人采用局部最大似然法重新检验了日长和大气中的低频信号特征, 由于检测的起伏较不稳定, 因此很难肯定它的物理机制是由核幔耦合引起的, 还是海洋的贡献。

自从 Madden<sup>[10]</sup> 等人首先发现赤道太平洋及印度洋区域的带风中存在近 50d 的振荡以后, 50d 振荡已成为国内外研究的主要热点。有些学者用不同的传统谱分析进行研究。研究表明这种振荡是不稳定的, Eubanks<sup>[11]</sup> 等人认为周期分别为 59.5d, 55d, 51d, 48d 和 44d 的能量几乎相等的谱峰没有什么物理意义。也有作者认为 50d 振荡是随机过程。造成这种解释的原因是经典的谱分析而使谱峰分裂, 邻近的谱峰分辨率不高所致。

## (2) 对极移的分析

在极移资料分析中, 特别是 Chandler 摆动统计特性的复杂性多年来一直是十分活跃、分歧又比较大的一个问题。问题主要集中在确定本征频率是单频还是双频上。如 Rochester 对 ILS 和 IPMS 资料都采用 FFT 作功率谱分析得出谱是分裂的, Vondrak<sup>[12]</sup> 对大气和极移资料, 采用带 Parzen 窗的 FFT 方法得到极移的周年项受 Chandler 摆动项的影响表现出谱峰分裂。Wilson<sup>[13]</sup> 等人曾用 Fourier、AR、ARMA 三种谱分析方法, 分析了 1899 年到 1977 年的极移资料, 并作了对比。他们的结论是 ARMA 方法较好, 它比 Fourier 具有更高的分辨率, 尤其适用于短时序列和有噪声的资料。Fourier 变换是假定信号可视为周期函数之和, 并限制在有限区间内为周期过程。最大熵谱分析要求序列为平稳的随机序列, 使其保持平稳的统计性质。但 AR 谱和资料长度、资料间隔及定阶数关系很密切。一般所选阶数根据经验而定。这很难避免地会带来虚假的周期。

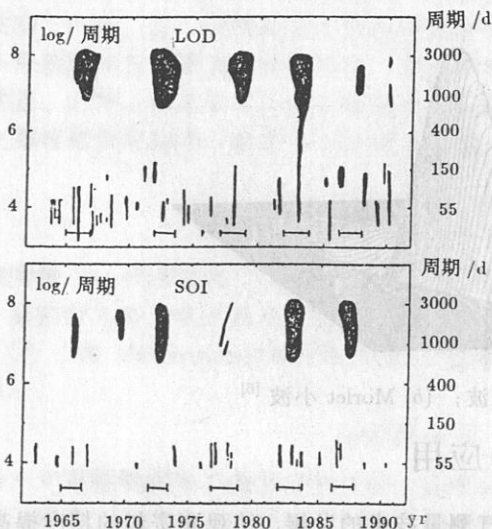


图 2 日长 (LOD) 和南方涛动 (SOI) 在低频和高频变化域上的小波变换<sup>[4]</sup>

Gambis<sup>[4]</sup> 对 LOD 和 SOI 资料, 运用小波变换方法分析从年际尺度 (3000d) 直到短时间尺度上 (40d) 的变化特征。他用 Mexican hat 分析小波计算系数  $C_{a,b}$  (如图 2 所示)。由图 2 看出两种序列对应于 ENSO 历元有显著的低频振荡; 而在高频段有所不同, 在 LOD 中, 高频振荡信号并不更多集中在 ENSO 事件期, 也就是大尺度和小尺度没有联系。而在 SOI 中其高频变化与 ENSO 事件相关有 60% 以上。这意味着 SOI 是由高频 40—50d 波动触发引起的。他并分析出 LOD 和 SOI 年际振荡随季节变化的演化过程。

总之, 经典的谱分析由于其未能实现时间域上的局部化, 虽能给出信号在频率域上的信息, 但容易造成输出信号的失真, 特别是对包含有变强度和周期非稳定的信号。同时如想要得到信号在某一历元时段的谱峰特性, 只有移动一段资料才能获得该历元时段的平均效果, 因此经典谱分析方法不能进行实时处理, 特别是对非平稳信号, 传统的谱分析方法更是无能为力。

针对上述经典谱分析的不足之处, 国内外学者近几年采用新的谱分析方法, 即小波变换方法, 它对描述似周期和瞬时波动以及地球自转、大气、海洋观测序列中多尺度变化是一种很好的数学工具。

由于地球自转特别是 LOD 变化和大气序列的不平稳, 它们又含有丰富的多尺度信息。而小波变换分析最适用于这类序列的分析。

Kosek<sup>[14]</sup> 等人对激光测卫 (CSR3LOI) 极坐标和大气激发函数先用时间变化谱 (周期图) 分析。后来为了检验其序列的非平稳性, 又用小波变换方法来分析极坐标和大气中的短周期变化。结果表明, 极坐标中短周期振荡有约两年变化。在 1982—1983 年 El Niño 期间和 1988 年强 La Niño 与 1985 年弱 La Niño 期间, 短周期振荡特别强。Chao 等人用 Morlet 分析小波来分析 LOD 序列中不同尺度上的谱 (图 3), 发现准两年振荡 (QBO) 在不同年份强弱有所不同。特别是用小波变换发现短于十几天的潮汐项随时间有规律的变化。

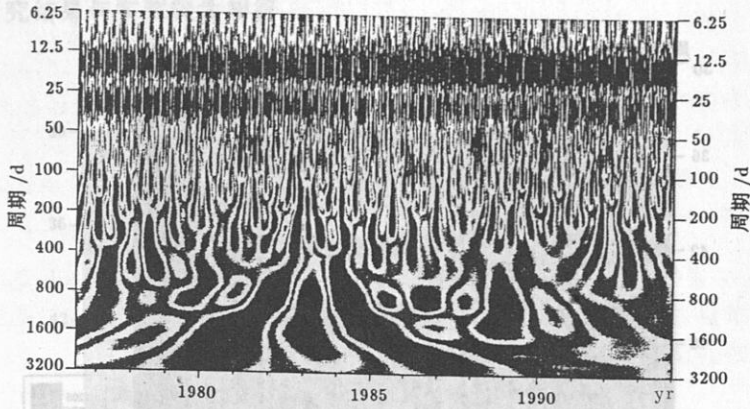


图 3 扣去季节性变化后的日长变化 (从 6—3200d 周期的变化)  $\Delta$ LOD 的小波变换分析<sup>[5]</sup>

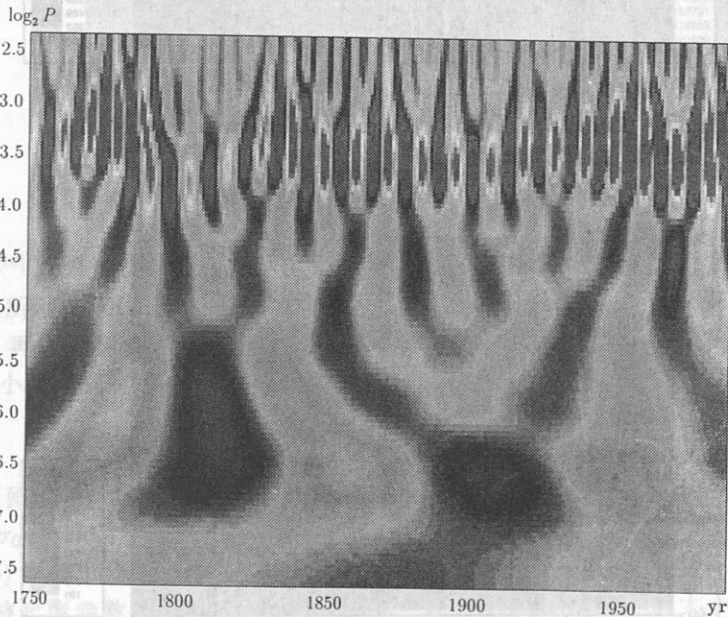


图 4 太阳黑子数周期变化的小波变换

Abarcadel<sup>[15]</sup> 等人对 1963—1991 年的极移资料运用小波变换分析, 发现有强的准两年振荡。约 5 年以上周期在 1970 年以前得到增强。在 1970 年后, 发生了分歧, 将被 3.5—4 年的短周期代替。

Litte<sup>[16]</sup> 等人用小波变换分析夏威夷附近东太平洋水深 5500km 处的地形分布情况, 发现

了一个 200km 左右区域异常的地形带。通过谱分析表明：波长短于 25km 的功率要比加拉巴哥 ( $-95^{\circ}\text{W}$ ,  $12^{\circ}\text{S}$ ) 和 Mathematician 洋脊 ( $-111^{\circ}\text{W}$ ,  $18^{\circ}\text{N}$ ) 小 5—10 倍, 而波长长于 25km, 其功率要比这些周围区域大 2—3 倍。进一步研究发现这个低频带异常特征的振幅要比邻近区域小得多。在这篇文献中, 采用了 Morlet 分析小波。认为这种小波在时间和频率域有迅速衰减的功能, 而且能在时间和频率域上获取最大的局部化信息。文中认为只有用小波变换才能分析出不同空间尺度上的异常精细纹理特征。

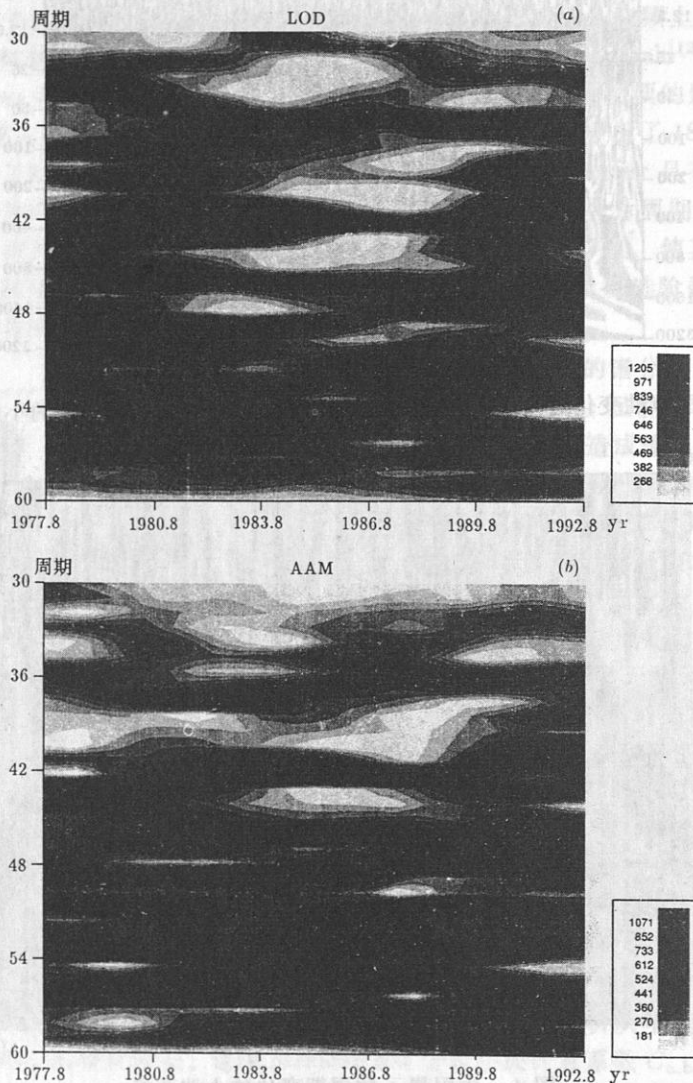


图 5(a)(b) 日长、大气角动量从 30—70d 变化的小波变换<sup>[19]</sup>

为了证实小波变换分析在日地关系研究中的有效性, Ochadlick<sup>[17]</sup> 采用小波变换来研究太阳周的周期变化特性。因为太阳周现象是准周期, 它的时间序列更适合用小波变换来分析。最近, 我们也采用了 1750—1993 年的太阳黑子相对数平均值进行一维小波变换分析, 所得结

果如图 4 所示。图中纵坐标单位为对数  $\log_2 P$ ,  $P$  为周期, 它显示出太阳周期的空间演化特征。以前用标准 Fourier 分析只得到平均周期结果, 而现在用小波变换可提供太阳周的周期瞬时变化特征, 这将为进一步分析日地关系提供更精细的信息。

目前气候是否相对以往变暖, 是当前气候领域中的研究热点。过去对气候突变的研究往往用统计方法, 因此不可能分析出突变点。由于气候资料是多尺度的, 因此刘太中等人<sup>[18]</sup>用小波变换方法分析了北半球平均温度资料, 找到了不同层次不同时间尺度上气候变冷和变暖的突变点, 其研究结果与实测较为相符。

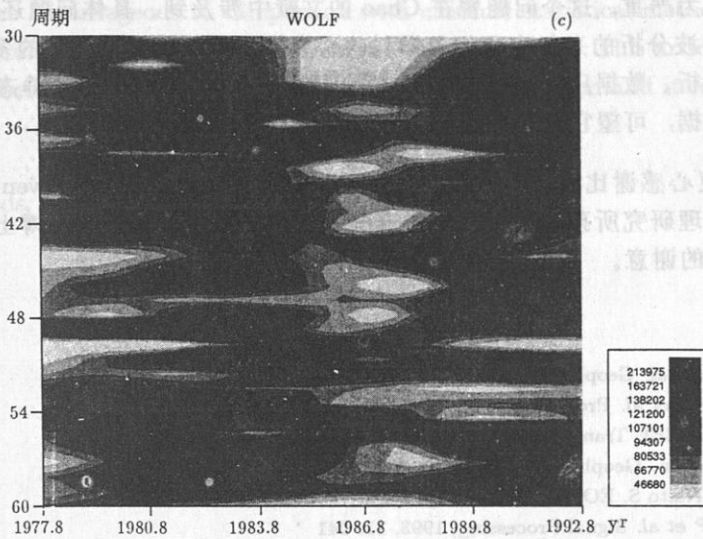


图 5(c) 太阳黑子数从 30—70d 变化的小波变换<sup>[19]</sup>

本文作者<sup>[19]</sup>对日长、大气角动量及太阳活动指数 (Wolf 数和日冕亮度指数) 进行小波变换分析 (如图 5 所示)。因小波变换满足均值为零的允许条件, 因此我们对资料进行预处理。在扣除均值后, 再应用 Morlet 分析小波来研究几种序列中的 40—60d 的高频振荡, 简称 MJO 振荡。Morlet 小波公式也可改写为

$$\psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-(t/2\sigma)^2} \quad (7)$$

式中  $\omega_0$  是空间圆频率, 其他参数含意同前。因我们的资料统一采用每 5d 的值, 所以取  $\omega_0 = 5.336$  周/d,  $\sigma_0 = 20$ d。它满足  $\omega_0 \sigma_0 > 6$  的条件。这样我们可分离出 MJO 随时间的演化过程。系数  $S(a, b)$  给出了信号的时空结构。在图 5 中横坐标就是局部化参数  $b$  值——时间轴, 纵坐标即为小波尺度参数  $a$ ——频率 (周期)。第三轴给出系数  $S(a, b)$  的大小。从图中看出, LOD 和 AAM 有相似的 MJO 谱结构, 但精细分布仍有差别, 它们占有较宽的谱峰, 而 Wolf 数的 MJO 谱峰较窄。几种序列中的 40—60d 振荡在不同的历元处强弱分布不均匀。某些年份较强如 1979 年、1980 年、1981 年。某些年份较弱如 1985 年、1986 年。它正好对应于太阳活动的峰年左右和谷年附近。我们认为小波变换分析可帮助我们进一步理解日长变化, 大气角动量与太阳活动之间的内在联系。

## 4 结束语

以地震资料分析中发展起来的小波理论,近几年已成为数学界前沿领域之一,它是泛函分析、Fourier变换、样条分析等方法的完善总结。本文中对连续小波变换的基本原理及特点作了介绍,又对经典数学方法在地球动力学上的应用作了综述,同时也指出了它的不足之处,并评述了小波变换在天文地球动力学应用上所取得的新进展,它具备了经典数学方法的一些优点。但应指出的是小波谱也受到某些限制。因为小波的瞬时局部化,使频率解受到限制。尤其在低频处小波的非正交性,妨碍了对许多细节的检测,从而引出了谱的边缘效应。它对长周期更为严重。这个问题曾在Chao的文献中涉及到。具体问题还要具体对待。

总之,小波分析的兴起为我们各学科的研究提供了新的手段。它的多分辨分析能力,为信号的局部分析、数据压缩、信噪分离、边缘检测以及突变的定位、静态效应的识别等应用提供了理论依据,可望它在地球动力学领域中会有更广阔的应用前景。

**致谢** 作者衷心感谢比利时皇家天文台 Ms. A. Debecker 和 K. Verneiven 及中国科学院武汉测量与地球物理研究所孙和平博士提供有关资料。对美国宇航局赵丰博士给作者的帮助与指导,表示深深的谢意。

## 参 考 文 献

- [1] Morlet J G et al. *Geophysics.*, 1982, 47: 203
- [2] Grossmann A et al. *Proc. Marseille*, Berlin: Springer Verlag, 1989: 11
- [3] Mallat S G. *IEEE Trans. PAMI.*, 1989, 11: 674
- [4] Gambis D. *Ann. Geophysicas.*, 1992, 10: 428
- [5] Chao B F, Naito S. *EOS* 1995, 76: (16): 161
- [6] Antoine J P et al. *Signal Processing*, 1993, 31: 241
- [7] Daubechies I. *IEEE Trans Inform. Theory*, 1990, 36: 961
- [8] Meyer Y. *IEEE. Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, 1989, 37: 674
- [9] Rosen D D, Salstein D A. *J.G.R.*, 1983, 88: C91, 5451
- [10] Madden R A, Jullan P R. *J. Atmos. Sci.*, 1972, 29: 1109
- [11] Enbanks T M et al. *J. Geophys. Res.*, 1985, 90: 5385
- [12] Vandrak. *Bull. Astron. Inst. Crechosi*, 1988, 39: 172
- [13] Wilson C et al. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1980, 62: 605
- [14] Kosek W et al. *IAGG in Beijing, China*, 1993: 340
- [15] Abarcadell R A, Carenave A. *Geophys. Res. Lett.*, 1994, 21: 2361
- [16] Litte S A et al. *Geophys. Res. Lett.*, 1993, 20: 1915
- [17] Ochadlick A R et al. *Geophys. Res. Lett.*, 1993, 20: 1471
- [18] 刘太中等. *地球物理学报*, 1995, 38: 158
- [19] 顾震年. *中国科学院上海天文台年刊*, 1995, (16): 21

(责任编辑 舒似竹)



# The Wavelet Transform and Its Application to Astron-geodynamics

Gu Zhennian Wang Guangli

(Shanghai Astronomical Observatory, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030)

## Abstract

In the Paper, a new approach based on the recent concept of the wavelet transform is introduced. It is more advantageous in comparison with classical statistical methods and plays an important role in many fields of astron-geodynamics in recent years. This article briefly and systematically describes the principle and technique of wavelet transform and its application to astron-geodynamics.

**Key words** methods: analytical—Earth

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = -\frac{\Delta \psi}{r^2} = -\frac{\Delta \psi}{r^2}$$

国家自然科学基金委员会上海天文台天文动力学重点实验室资助项目