第 15 卷　第 3 期　　天文学进展　　Vol.15,　No.3
1997 年 9 月　　PROGRESS IN ASTRONOMY　　Sep., 1997

# 谱线形成深度的理论及其应用 (II): 响应函数的发展

屈中权　丁有济　张霄宇　陈学昆

(中国科学院云南天文台　昆明　650011)

摘　要

作为系列文章的第二篇，给出了响应函数概念的发展概貌及关于其意义的讨论。这一概念从以单纯考察表面观测量如何随一定深度处物理量的扰动作出反应发展到由此考察可得出谱线参量结构方面的信息。在简评中比较了贡献函数和响应函数的作用和意义，指出响应函数在导出太阳大气中物理量结构的信息方面优于贡献函数的原因。

关 键 词　谱线形成 — 谱线：轮廓 — 辐射转移 — 太阳：磁场

## 1　响应函数的发展及其应用

响应函数的构造是为了考察当一定深度处的物理量发生小的改变或扰动时，作为其函数的表面观测量如何随之变化。这种扰动通常处理到一阶项或作类似于量子力学微扰法处理。其产生一般是对所考虑的出射量的表达式作变分操作，将其定义为能反应扰动的项，出射量通过它而对这种扰动作出响应。它有如下的应用：(1) 导出所考虑的观测量的等效谱线深度；(2) 导出某些热力学参量随深度变化的信息；(3) 导出矢量磁场的空间三维结构，我们将这最后一项应用单独放入文章 (III) 中。

Mein[1] 首先考察了某一深度处谱线参量的扰动对出射谱线的影响，但直到 1975 年 Beckers 和 Milkey[2] 才比较专门地处理这类问题且给出了响应函数这个术语，后来相应的理论才得到迅速发展。尽管它的起步较贡献函数晚，由于受到越来越多的人重视而正在走向应用成熟的阶段。以下我们仍然将它的发展分成 90 年代前和后两部分。

### 1.1　90 年代前的工作

Beckers 和 Milkey[2] 在写出表面出射谱线强度

$$I_l = \int_0^\infty S e^{-\tau} \mathrm{d}\tau \tag{1.1}$$

国家自然科学基金资助项目　云南省科委应用基础研究基金资助项目

1995 年 12 月 1 日收到　1996 年 9 月 15 日收到修改稿

之后提出如下问题：如果在线吸收光学厚度 $\tau_\lambda$ 的间隔 $(\tau_\lambda, \tau_\lambda+\delta\tau_\lambda)$ 之间，线心与连续吸收系数之比 $\eta$ 改变一个因子 $(1+\varepsilon), \varepsilon \ll 1$，那么 $I_1$ 将如何变化？令 $\delta I_1$ 反映这个局部区域物理学条件变化对 $I_1$ 的改变，则 $\delta I_1/(\varepsilon\delta\tau_\lambda)$ 被定义为反映此变化的响应函数 $RF(\tau_\lambda)$。假设在 LTE 下或源函数 $S=B(\tau)$(本文中 $B$ 均表示 Planck 函数) 不受 $\eta$ 变化影响条件下

$$RF(\tau_\lambda)=\eta\left[\int_\tau^\infty B(t)e^{-t}\mathrm{d}t-B(\tau)e^{-\tau}\right] \tag{1.2}$$

作为例子，将 $RF(\tau_\lambda)$ 应用到多普勒漂移 $\varepsilon$ 导致出射强度的改变的情形。假定在 $(\tau_\lambda, \tau_\lambda+\delta\tau_\lambda)$ 内存在一个局部的多普勒速度 $V$，其产生的漂移 $\varepsilon=\eta' V\lambda(c\eta)^{-1}$ 远小于谱线宽度，$\eta'=\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\lambda, c$ 为光速，则产生的 $I_1$ 改变

$$\delta I_1=-\eta' V\lambda RF(\tau_\lambda)(c\eta)^{-1}\delta t_\lambda \tag{1.3}$$

假设 $V(\tau)$ 分布在不同层次，则总的强度改变

$$\Delta I_1=\int_0^\infty \delta I_1\mathrm{d}t_\lambda=-(\lambda/c)\int_0^\infty \frac{\eta'(t_\lambda)}{\eta(t_\lambda)}V(t_\lambda)RF(t_\lambda)\mathrm{d}t_\lambda \tag{1.4}$$

如果进一步假定 $\eta'/\eta$ 与深度无关，那么 $RF(\tau_\lambda)$ 的行为类似于多普勒速度的权重函数。若 $V(t_\lambda)$ 随 $t_\lambda$ 迅速增加，则导致的谱线强度改变反映了在比较深的 $t_\lambda$ 处的速度；反之如果随深度减小，比较浅的 $t_\lambda$ 处的速度会变得更重要。

对一个单调的多普勒速度分布 $V(\tau)$ 而言，定义谱线等效光学深度 $\tau_{\lambda_{\rm eff}}$，使得在此处的 $V(\tau_{\lambda_{\rm eff}})$ 相应于观测到的速度：

$$V(\tau_{\lambda_{\rm eff}})\equiv V_0=-\int_0^\infty \frac{\eta'}{\eta}VRF\frac{\mathrm{d}t_\lambda}{(\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}\lambda)} \tag{1.5}$$

如果将方程 (1.2) 重新写成

$$RF(\tau_\lambda)\mathrm{d}\tau=e^{-\tau}[\eta I_1(\tau)-\eta B(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{1.6}$$

由此方程可得到响应函数的物理解释。由于右端括号内第一项代表通过 $\mathrm{d}\tau$ 内粒子对向大气层外辐射的吸收，而第二项代表谱线发射，因而括号里的项代表了辐射强度的净损失。消光因子 $e^{-\tau}$ 将局部的净损失转移到了大气层表面，于是 $RF(\tau_\lambda)$ 意味着大气中每层对向外出射谱线的贡献。

Beckers 和 Milkey 批评了 Gurtovenko 等人 (文 (I) 中的文献 [13]) 的贡献函数 $F^*(\tau)$ 的不合适性，写出

$$F^*(\tau)=\eta\left[e^{-\eta}\int_{\tau_\lambda}^\infty Be^{-t_\lambda}\mathrm{d}t_\lambda-Be^{-\tau}\right] \tag{1.7}$$

他们指出：$F^*(\tau)$ 与 $RF(\tau_\lambda)$ 相似但不等价。尽管 $F^*(\tau)$ 与 $RF(\tau_\lambda)$ 表达式中右端第二项相同，但上式第一项代表向外的连续谱强度经过消光 $e^{-\tau}$ 后在总的光学深度 $\tau$ 处的值。对强吸收线 $F^*\gg RF$，两者对应的曲线当 $I_c(\tau)-I_1(\tau)$ 迅速变化时将有极大的差别，从物理意义上考虑，$F^*$ 代表了假定入射到 $\tau$ 层次的连续辐射损失与谱线发射的获取之差，但对弱线，由于 $I_1$ 与 $I_c$ 差别不大，$RF$ 与 $F^*$ 基本上等价。在作出以上的比较后，他们画出了用 HSRA 模型计算出的虚拟中性 Ti 线 (电离势设为 0) 在 5000Å线心处的 $RF$ 和 $F^*$ 曲线，结果发现这两

个函数曲线具有相似的行为。尽管有此现象，他们仍然指出，响应函数和速度、磁场扰动等与深度有关的现象对谱线造成的影响有更直接的关联。它不仅适用于弱线，对它唯一的限制条件是 $S(\tau)$ 对 $\eta$ 的小变化保持不变，若 $\eta$ 的改变是由于多普勒漂移，这也不能对 $RF$ 的使用造成严重影响，甚至在 Non–LTE 下也可使用，因为 $S$ 由于 $\varepsilon \neq 0$ 的变化可能与 $\varepsilon^2$ 成比例。

Makita(见文 (I) 中文献 [3]) 考察 Beckers 和 Milkey 的响应函数作为权重函数导出谱线形成深度的意义，指出从表达式

$$\overline{h} = \int_{-\infty}^{\infty} hRF(h)\mathrm{d}h \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} RF(h)\mathrm{d}h \tag{1.8}$$

可看出，$\overline{h}$ 定义为某些物理量特别是 $\eta$ 的变化造成出射强度改变的深度，而在响应函数推导过程中用到了分部积分，这样一些项被删掉了，因而产生了不确定性。

Caccin 等人 [3] 指出 Beckers 和 Milkey 的响应函数描述了在给定频率处沿视线方向物理条件的局部变化，但他们只考虑到光学厚度的线性扰动，并假设了源函数在此扰动下保持不变，于是 Caccin 等人着手将此理论推广到能处理任何热力学参量以及速度场的扰动。

用微扰法解转移方程，假定微扰有 $\alpha\varepsilon(z)$ 的形式 ($\alpha$ 为实数，$\varepsilon(z)$ 为扰动随深度的分布)，而扰动对总的吸收 $\kappa$ 和源函数 $S$ 的作用可通过包含 $\varepsilon(z)$ 的泰勒展开式描述，于是可得到发射系数的相应表达式。现在寻求转移方程如下形式的解

$$I(z) = I_0(z) + \frac{\alpha}{1!}I_1(z) + \frac{\alpha^2}{2!}I_2(z) + \cdots\cdots \tag{1.9}$$

将此表达式及 $\kappa, B$ 和发射系数的展开式代入转移方程，再根据通常的微扰方法可得出零阶、一阶、二阶等辐射强度 $I_0, I_1, I_2\cdots\cdots$; $\kappa$ 和 $S$ 的相应项为 $\kappa_0, \kappa_1, \cdots$，和 $B_0, B_1, \cdots$。他们以如下扰动方程得出响应函数：

$$\begin{aligned} \delta I(0) &= \int_0^{\infty} \alpha\varepsilon(t_\mathrm{c})\left(\tfrac{\kappa_0}{\kappa_\mathrm{c}}B_1 + \tfrac{\kappa_1}{\kappa_\mathrm{c}}B_0 - \tfrac{\kappa_1}{\kappa_\mathrm{c}}I_0\right)\exp[-t_0(t_\mathrm{c})]\mathrm{d}t_\mathrm{c} \\ &\equiv \int_0^{\infty} \alpha\varepsilon(t_\mathrm{c})RF(t_\mathrm{c})\mathrm{d}t_\mathrm{c} \end{aligned} \tag{1.10}$$

于是在每一深度，这个函数可作为扰动的权重来得出出射强度的变化。对 $\varepsilon(t_\mathrm{c})$ 仅在一个非常薄的区域 $\delta t_\mathrm{c}$ 为零的情形，有

$$\delta I/\alpha\varepsilon(t_\mathrm{c})\delta t_\mathrm{c} \approx RF(t_\mathrm{c}) \tag{1.11}$$

方程 (1.10) 式定义的是相应出射辐射的响应函数，对谱线深度 $I_\mathrm{c} - I$ 也可寻求相同的路径得出响应函数。以上定义的响应函数可适应于以下原因产生的扰动：(1) 由于速度场造成的谱线光学厚度的多普勒漂移；(2) 微观湍动速度的变化；(3) 在恒电子压力下温度的改变。相应的响应函数为

$$\alpha\varepsilon(t_\mathrm{c}) = v(t_\mathrm{c})/c: \quad RF_{v/c}(t_\mathrm{c}) = c\frac{\partial\eta}{\partial v}(B - I)\exp[-t(t_\mathrm{c})] \tag{1.12}$$

$$\alpha\varepsilon(t_\mathrm{c}) = \delta\xi/\xi: \quad RF_{\delta\xi/\xi}(t_\mathrm{c}) = c\frac{\partial\eta}{\partial\xi}(B - I)\exp[-t(t_\mathrm{c})]; \tag{1.13}$$

$$\alpha\varepsilon(t_\mathrm{c}) = \delta T/T: \quad RF_{\delta T/T}(t_\mathrm{c}) = \frac{T}{\kappa_\mathrm{c}}\left[\frac{\partial\kappa}{\partial T}(B - I) + \kappa\frac{\partial B}{\partial T}\right]\exp[-t(t_\mathrm{c})] \tag{1.14}$$

其中 $c$ 为光速，$\eta$ 为谱线吸收系数与连续吸收系数之比。

作进一步的考虑：当 $RF(t_c)$ 在 $\bar{t}_c$ 附近出现狭窄的峰值，则

$$\delta I(0) = \alpha\varepsilon(\bar{t}_c)\int_0^\infty RF(t_c)\mathrm{d}t_c \tag{1.15}$$

这就意味着对任何频率，只要用非扰动大气模型，$\delta I(0)$ 通过一个可以计算的系数正比于扰动值，因而我们可以将 $\bar{t}_c$ 定义为对应出射强度由于扰动变化的等效深度。但如果 $RF$ 在此区域的绝对值远大于零，$\delta I(0)$ 在以上假设下对 $t_c$ 的值很不敏感，因而选择 $\bar{t}_c$ 的更好方法是用 $RF$ 作为权重来替代以上的定义。

Landi Degl'Innocenti E. 和 Landi Degl'Innocenti M. 在文献 [4] 中得到了 LTE 下偏振辐射转移方程组的扰动解后，引入了他们的响应函数。

偏振辐射转移方程组在 LTE 下写为

$$\mu\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{j=1}^{4}(k\delta_{ij} + K_{ij})(I_j - B_j), \quad i = 1, \cdots, 4 \tag{1.16}$$

其中 $k$ 为连续吸收系数在谱线区域与参考频率 (5000Å) 处之比，$\delta_{ij}$ 为通常使用的 Kronecker 符号，$I_i$ 和 $B_i$ 为如下矢量 ("+" 为矩阵转置)

$$I_i = (\mathrm{I},\mathrm{Q},\mathrm{U},\mathrm{V})^+, \quad B_i = (B,0,0,0)^+ \tag{1.17}$$

$B$ 为 Planck 函数，$K_{ij}$ 即吸收矩阵 $H_{ij}$ 乘以线心处吸收系数与连续吸收系数之比 $\eta(\tau)$，$H_{ij}$ 的表达式可见文献 [5]。

引入符号 (以下下标求和均为从指标 1 到 4)

$$J_k = \sum_i X_{ki}^{-1} I_i, \quad G_k = \sum_i X_{ki}^{-1} B_i, \tag{1.18}$$

$X_{ki}$ 是使 $H_{ij}$ 对角化的矩阵，它使得方程组 (1.16) 可解除 I,Q,U,V 的耦合而得到解。假设 $H_{ij}$ 随深度 $\tau$ 变化很小

$$H_{ij} \to H_{ij} + \delta H_{ij}(\tau) = H_{ij} + \delta\lambda(\tau)D_{ij} \tag{1.19}$$

这儿 $\lambda$ 代表影响斯托克斯轮廓的磁场或热力学参量，$D_{ij}$ 与深度无关，$\delta\lambda(\tau) \ll 1$,

$$\delta H_{ij} = \delta\lambda(\tau)\frac{\partial H_{ij}}{\partial\lambda} \tag{1.20}$$

作替换 $I_i \to I_i + \delta I_i, H_{ij} \to H_{ij} + \delta H_{ij}(\tau)$, 代入转移方程组可得到关于 $\delta I_i$ 的方程，经过系列代换后，响应函数 $R_i(\tau)$ 便可从 $\delta I_i$ 的表面解中得出

$$\delta I_i(0) = \int_0^\infty \mathrm{d}\tau\delta\lambda(\tau)R_i(\tau) \tag{1.21}$$

$R_i(\tau)$ 表述为

$$R_i(\tau) = -\frac{1}{\mu}\eta(\tau)\sum_{kl} X_{ik}\exp\left\{-\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}\tau'}{\mu}\left[k(\tau') \ \ +\eta(\tau')h^{\langle k\rangle}\right]\right\}\Delta_{kl}(J_l(\tau) - G_l(\tau)) \tag{1.22}$$

$h^{\langle k\rangle}$ 是 $X_{ik}$ 使 $H_{ij}$ 对角化后产生的四个本征值，它们和矩阵 $X_{ij}$ 及 $X_{ij}^{-1}$ 由 Sidlichovsky[6] 给出。

Landi Degl' Innocenti 和 Landofi[7] 在导出太阳上磁流管的热力学性质时，引入了响应函数来进行分析。在假设磁流管 (MFT) 中磁场平行于视线方向即纵场情形下，只处理斯托克斯 I 和 V 轮廓，并采用 LTE 假设。

首先写下右旋和左旋圆偏振强度 $I_{\mathrm{r,l}}(=(\mathrm{I}\pm\mathrm{V})/2)$ 的转移方程，然后考虑一个特别简化的大气模型，其中热力学结构由 HSRA 模型描述，而磁场不随深度改变，例如恒为 1500G，此模型可称为磁流管零阶近似。现假设在 $\tau$ 处，温度 $T$ 和电子压力 $P_{\mathrm{e}}$ 可写为

$$T^{\mathrm{MFT}}(\tau)=T(\tau)+\delta T(\tau)=T(\tau)\{1+x(\tau)\} \tag{1.23}$$

$$P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{MFT}}(\tau)=P_{\mathrm{e}}(\tau)+\delta P_{\mathrm{e}}(\tau)=P_{\mathrm{e}}(\tau)\{1+y(\tau)\} \tag{1.24}$$

$T(\tau),P_{\mathrm{e}}(\tau)$ 为零阶值， $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 代表了磁流管中温度和电子压力相对于其外大气的变化，因而若得知这两个量便可得出磁流管中的热力学性质。如果 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 远小于 1，则 $\delta(\kappa_{\mathrm{c}}/\bar{\kappa}_{\mathrm{c}})$、$\delta(\kappa_{\mathrm{l}}/\bar{\kappa}_{\mathrm{c}})$ 可按 $\tau$、$P_{\mathrm{e}}$、$\delta B$ 关于 $T$ 的函数作一阶展开，从而可得出 $I_{\mathrm{r,l}}$ 的一阶修正的方程 (忽略 $\phi_{\mathrm{r,l}}$ 的变化)：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta I_{\mathrm{r,l}}=\eta_{\mathrm{r,l}}\left\{\delta I_{\mathrm{r,l}}-\delta\bar{B}_{\mathrm{r,l}}\right\} \tag{1.25}$$

式中

$$\eta_{\mathrm{r,l}}=\kappa_{\mathrm{c}}/\bar{\kappa}_{\mathrm{c}}+(\kappa_{\mathrm{l}}/\bar{\kappa}_{\mathrm{c}})\varPhi_{\mathrm{r,l}} \tag{1.26}$$

$$\delta\bar{B}_{\mathrm{r,l}}=\frac{1}{2}\delta B-\frac{\delta(\kappa_{\mathrm{l}}/\bar{\kappa}_{\mathrm{c}})+\delta\varPhi_{\mathrm{r,l}}(\kappa_{\mathrm{l}}/\bar{\kappa}_{\mathrm{c}})}{(\kappa_{\mathrm{l}}/\bar{\kappa}_{\mathrm{c}})+\phi_{\mathrm{r,l}}(\kappa_{\mathrm{l}}/\bar{\kappa}_{\mathrm{c}})}(I_{\mathrm{r,l}}-B/2) \tag{1.27}$$

$\kappa_{\mathrm{l}}$ 和 $\bar{\kappa}_{\mathrm{c}}$ 为线吸收和连续吸收系数， $\varPhi_{\mathrm{r,l}}$ 为吸收轮廓， $\mathrm{d}\tau=-\bar{\kappa}_{\mathrm{c}}\mathrm{d}s$ 。从方程 (1.27) 可得

$$\delta V=\delta I_{\mathrm{r}}-\delta I_{\mathrm{l}}=\int_0^{\infty}\{RFV_T(\tau)x(\tau)+RFV_{P_{\mathrm{e}}}(\tau)y(\tau)\}\mathrm{d}\tau \tag{1.28}$$

相应于温度 $T$ 和电子压力 $P_{\mathrm{e}}$ 的响应函数可分别表述如下：

$$RFV_T(\tau)=\alpha_{\mathrm{r}}(\tau)\exp\left(-\int_0^{\tau}\eta_{\mathrm{r}}(\tau')\mathrm{d}\tau'\right)-\alpha_{\mathrm{l}}(\tau)\exp\left(-\int_0^{\tau}\eta_{\mathrm{l}}(\tau')\mathrm{d}\tau'\right) \tag{1.29}$$

$$RFV_{P_{\mathrm{e}}}(\tau)=\beta_{\mathrm{r}}(\tau)\exp\left(-\int_0^{\tau}\eta_{\mathrm{r}}(\tau')\mathrm{d}\tau'\right)-\beta_{\mathrm{l}}(\tau)\exp\left(-\int_0^{\tau}\eta_{\mathrm{l}}(\tau')\mathrm{d}\tau'\right) \tag{1.30}$$

方程中 $\alpha_{\mathrm{r,l}}$ 和 $\beta_{\mathrm{r,l}}$ 为谱线参量及其导数的函数。由于响应函数依赖于波长，他们选择 $V$ 轮廓最大值处的波长点来进行研究，采用类似于 Stenflo 的谱线比技术 [8] ，一对相隔很近的由同一种原子或离子产生的磁敏谱线 $V$ 参量之比的相对变化可写为

$$\frac{\delta(V_1/V_2)}{V_1/V_2}=\int_{-\infty}^{\infty}\{RFR_T(\tau)x(\tau)+RFR_{P_{\mathrm{e}}}(\tau)y(\tau)\}\,\mathrm{d}(\ln\tau) \tag{1.31}$$

响应函数

$$RFR_T(\tau)=\tau\left(\frac{RFV_T^{\langle 1\rangle}(\tau)}{V_1}-\frac{RFV_T^{\langle 2\rangle}(\tau)}{V_2}\right) \tag{1.32}$$

上标 ⟨1⟩ 和 ⟨2⟩ 表征两条谱线。

Landi Degl' Innocenti 和 Landofi 选用三对 5000—6000Å的铁线作了研究，得出如下结论：

(1) 在一对谱线中，如果两条谱线的电离势相差越大， $RFR$ 也会相差越大；

(2) $RFR$ 对温度的敏感比对电子压力的敏感高一个量级；

(3) 只有当 RFR 在某个光学深度处峰值比较尖锐时，我们才可以很好地导出此深度处的温度和电子压力；

(4) $RFR_{P_e}(\tau)$ 和 $RFR_T(\tau)$ 满足如下关系

$$RFR_{P_e}(\tau) = \xi RFR_T(\tau) \tag{1.33}$$

$\xi$ 为常量，与谱线对的选取无关，在采纳的模型中近似为 −0.1，这点也可从理论上得到证明。方程 (1.31) 可写为

$$\frac{\delta(V_1/V_2)}{V_1/V_2} \approx \int_{-\infty}^{\infty} RFR_T(\tau)(x(\tau)+\xi y(\tau))\mathrm{d}(\ln\tau) \tag{1.34}$$

这表明文中建议的方法不能给出 $T$ 和 $P_e$ 的独立信息，而只能给出共同的与深度有关的结构

$$z(\tau) = (x(\tau)+\xi y(\tau)) \tag{1.35}$$

(5) 一旦得知原子在不同电离态的数目，运用最小二乘法可以得出 $z(\tau)$ 。

以上是他们在考察磁流管的热力学性质时所作的工作。不久他们 [9] 在考察速度梯度如何导致谱线不对称性时，又引入了一个新的响应函数。

采用一阶线性分析，由于速度场 $w(\tau)$ 产生的斯托克斯参量扰动 $\delta S_j(S_{1,2,3,4} = \mathrm{I,Q,U,V})$ 可以写为

$$\delta S_j(\tau=0) = \int_0^{\infty} RF_j(\tau)\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad j=1,2,3,4 \tag{1.36}$$

$RF_j$ 便是所求的合适的响应函数，其中

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_D}\frac{w(\tau)}{c} \tag{1.37}$$

方程中 $c$ 为光速。采用如下的简化假设： (1) 矢量磁场沿视线方向的分量、由高斯函数描述的吸收和反常色散轮廓不随深度变化； (2) 源函数为光学深度的线性函数 ($S(\tau) = B_0 + B_1\tau$) 以及谱线吸收系数与连续谱的吸收系数之比 $\eta_0$ 为常数。他们写下了在离线心 $\Delta\lambda$ 处斯托克斯 Q,V 的响应函数

$$RF_{\mathrm{Q,V}}(\Delta\lambda;\tau) = \frac{B_1\eta_0}{l^2(\Lambda_+^2+\Lambda_-^2)\Delta}\exp[-(1+\eta_0 h_0)\tau] \times \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} W_i(\tau)M_{ij}^{(\mathrm{Q,V})}D_{jk}N_{k-1} \tag{1.38}$$

其中 $h_0$ 为 $4\times4$ 吸收矩阵 $H_{ij}$ 的 (1,1) 元素，而系数 $l, \Lambda_\pm, W_i, M_{ij}, D_{ik}, N_{k-1}$ 各矩阵元素均为吸收矩阵中各元素的函数。

数值拟合表明： Q 轮廓对称性比 V 轮廓的反对称性受速度梯度的影响大一个量级。

Grossmann–Doerth 等人 [10] 在 1988 年将 Caccin 等人 [3] 的响应函数推广到磁场存在时的情形 (下面出现的未说明符号在文 (I) 中第 2.1 节已有表述) 。

令 $\beta(\tau_c)$ 为物理标量，对它的小扰动表示为

$$\beta \to \beta + \delta\beta \tag{1.39}$$

这个扰动影响到 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{F}$ 和 $\kappa_c$，将受到扰动的这些矩阵作泰勒级数展开，保留到一阶项，则包含斯托克斯参量的 $2\times 2$ 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 受扰动后的转移方程为

$$\frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}\tau_c} = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{D} + \delta\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^* - \delta\boldsymbol{F} \tag{1.40}$$

式中

$$\delta\boldsymbol{D} = \delta\beta\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial\beta} \tag{1.41}$$

$$\delta\boldsymbol{F} = \delta\beta\left[\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\beta} - \frac{1}{\kappa_c}\frac{\partial\kappa_c}{\partial\beta}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{F}) - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\beta}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}\frac{\partial\boldsymbol{A}^*}{\partial\beta}\right] \tag{1.42}$$

解方程 (1.40) 可得

$$\delta\boldsymbol{D}(0) = \int_0^\infty (\boldsymbol{T})^{-1}\delta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}^*)^{-1}\mathrm{d}\tau. \tag{1.43}$$

于是矩阵 $\boldsymbol{D}$ 相应于 $\beta$ 的响应函数

$$\boldsymbol{P}_\beta = \boldsymbol{T}^{-1}\left[\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\beta} - \frac{1}{\kappa_c}\frac{\partial\kappa_c}{\partial\beta}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{F}) - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\beta}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}\frac{\partial\boldsymbol{A}^*}{\partial\beta}\right](\boldsymbol{T}^*)^{-1} \tag{1.44}$$

与贡献函数相似，相应于斯托克斯参量的 $RF$ 由下述关系式得出

$$\begin{aligned}
P_{\beta,\mathrm{I}}(\tau_c) &= P_{\beta,11}(\tau_c) + P_{\beta,22}(\tau_c);\\
P_{\beta,\mathrm{Q}}(\tau_c) &= P_{\beta,11}(\tau_c) - P_{\beta,22}(\tau_c);\\
P_{\beta,\mathrm{U}}(\tau_c) &= P_{\beta,12}(\tau_c) + P_{\beta,21}(\tau_c);\\
P_{\beta,v}(\tau_c) &= -i\left[P_{\beta,12}(\tau_c) - P_{\beta,21}(\tau_c)\right].
\end{aligned} \tag{1.45}$$

当磁场强度 $H=0$，斯托克斯参量 I 的响应函数蜕化为 Caccin 等人的响应函数 [3]。对由相对谱线深度表征的谱线吸收响应函数，按以上相似程序也可得到。

## 1.2　90 年代的发展

Sanchez Almeida 考虑偏振情形下在连续谱光学深度 $\tau$ 处大气受到一物理量 $q$ 的扰动 $\delta q(\tau)$ 下斯托克斯参量所受影响时，以通常方式引入了如下响应函数 [11]：

$$\boldsymbol{R}_q(\tau) = -\boldsymbol{O}(0,\tau)\left\{\left[\frac{\partial}{\partial q}\boldsymbol{K}(\tau)\right](\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\tau) - \boldsymbol{K}(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial q}\delta\boldsymbol{S}(\tau)\right]\right\} \tag{2.1}$$

式中 $\boldsymbol{K}$ 为吸收系数矩阵。$\boldsymbol{S} = (S_\mathrm{I}, S_\mathrm{Q}, S_\mathrm{U}, S_\mathrm{V})^\mathrm{T}$ 为 non-LTE 下的源函数 $4\times 1$ 矩阵，上标 T 为矩阵转置，演化矩阵 $\boldsymbol{O}$ 满足

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\tau) = \int_0^\infty \boldsymbol{O}(\tau,\tau')\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\tau'}\boldsymbol{S}(\tau')\right]\mathrm{d}\tau'\right. \tag{2.2}$$

Sanchez Almeida 指出，与贡献函数不一样，响应函数是唯一的。方程 (2.1) 表述的响应函数 $\boldsymbol{R}_q$ 与 Grossmann–Doerth 等人的响应函数 [10] 是同一的，只是计算方法不一样。

Ruiz Cobo 和 del Toro Iniesta[12] 在考察了以上的工作后得出如下结论：在任何关于从光谱线推知观测量的三维结构的研究中，响应函数是最有效的。人们选择响应函数是因为它类似于辐射强度 $I$ 对物理学参量的偏微分，贡献函数只是告诉观测到的光子从哪些层次逃逸，而响应函数给出了在哪里这些光子"感觉"到了不同物理量的存在信息。

令 $x_i(\tau)$ 为一组表征大气结构的物理学参量，假设它们经历了小扰动 $\delta x_i(\tau)$，导致吸收矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和源函数 $\boldsymbol{S}$ 以线性方式变化，相应地斯托克斯参量的变化为

$$\frac{\mathrm{d}\delta \boldsymbol{I}}{\mathrm{d}\tau} = \boldsymbol{K}(\delta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}^*) \tag{2.3}$$

式中

$$\boldsymbol{S}^* = \delta \boldsymbol{S} - \boldsymbol{K}^{-1}\delta \boldsymbol{K}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}) \tag{2.4}$$

出射的扰动解可写为

$$\delta \boldsymbol{I}(0) = \int_0^\infty \boldsymbol{O}(0,\tau)\boldsymbol{K}(\tau)\boldsymbol{S}^*(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.5}$$

$\boldsymbol{O}$ 为演化矩阵，与 Sanchez Almeida 给出的演化矩阵作用相似，响应函数定义为

$$\boldsymbol{R}_i(\tau) \equiv \boldsymbol{O}(0,\tau)\left[\boldsymbol{K}(\tau)\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial x_i} - \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial x_i}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})\right], \tag{2.6}$$

它与 Sanchez Almeider[11] 的更普遍的定义是一致的。用此定义，方程 (2.5) 可写为

$$\delta \boldsymbol{I}(0) = \sum_{i=1}^{m}\int_0^\infty \boldsymbol{R}_i(\tau)\delta x_i(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.7}$$

此式表明响应函数和偏微分行为很相似。因而它给出了出射强度 $\boldsymbol{I}(0)$ 对物理学参量变化敏感的信息。换句话说，它们告诉了在哪里所考虑频率的光子"感受"到了给定物理量的影响，观测到的斯托克斯轮廓相似的变化可以视为在不同层次不同物理量扰动的结果。

接着他们深入地探讨了响应函数的性质，得出如下结论：

(1) 温度是决定响应函数最重要的物理量，它对响应函数的影响与磁场和速度场的影响很不相同。具体说来，磁场和速度场的影响是通过方程 (2.3) 中 $\boldsymbol{K}$ 包含的 $\varPhi$，而其他系数与磁场和速度场无关，只与温度、压力、化学元素组成及原子参量有关；

(2) 在谱线形成问题上，温度是起主要作用的量。在所考虑的频率光子产生的地方，温度便会被它们"感知"。另一方面，贡献函数和响应函数对温度的依赖显著地相似。由此可以推论，任何通过贡献函数尝试给一个测量参量 (如磁场强度) 指定一个平均形成深度将导致错误的结果。因而必须区分观测到的光子在哪里产生和这些光子在哪里受到物理量如大气磁场的影响；

(3) 当无速度梯度时，响应函数和斯托克斯轮廓一直存在对称性，但当存在速度梯度时，它们的对称性即破裂。

对于谱线吸收的响应函数可以通过以下途径得出，首先谱线吸收由相对深度表征：

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{R}}(0) = \boldsymbol{e}_0 - \frac{\boldsymbol{I}(0)}{I_{\mathrm{c}}(0)}, \quad \boldsymbol{e}_0 = (1,0,0,0)^+ \tag{2.8}$$

写出 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{R}}$ 的线性变化公式并与方程 (2.7) 比较即得

$$\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{R}}(\tau)=\frac{1}{I_{\mathrm{c}}^2(0)}\left[R^{\mathrm{c}}(\tau)\boldsymbol{I}(0)-\boldsymbol{R}_i(\tau)I_{\mathrm{c}}(0)\right], i=\mathrm{I,Q,U,V} \tag{2.9}$$

其意义为相应于出射斯托克斯轮廓和出射的非偏振连续谱的线性组合。当磁场和视向速度场这些参量的改变并不改变连续辐射时，出射和吸收的响应函数基本上是相同的。

若按 Magain 的程序 (文 (I) 中文献 [16]) 得出相应 $\boldsymbol{I}(0)$ 的响应函数为

$$\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{R}}(\tau)\equiv\boldsymbol{O}_{\mathrm{R}}(0,\tau)\left[\boldsymbol{K}_{\mathrm{R}}\frac{\partial\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}}{\partial x_i}-\frac{\partial\boldsymbol{K}_{\mathrm{R}}}{\partial x_i}(\boldsymbol{I}_{\mathrm{R}}-\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}})\right] \tag{2.10}$$

经检验它事实上等价为 $\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{R}}$。因而所谓的“谱线吸收”响应函数既没有简化关于谱线敏感度的解释也没有提供额外的信息。

为了更进一步揭示 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{R}}(\tau)$ 的意义，他们假设了物理量的扰动可以描述为简谐振荡的特殊情形：

$$\delta x_k(\tau)=a\quad\exp(-2\pi is\tau) \tag{2.11}$$

其中 $a$ 为足够小的量， $s$ 为分频。为简化起见，假设 $i\neq k$ 时， $\delta x_i=0$ ，于是

$$\delta\boldsymbol{I}(0)=a\int_0^{\infty}\boldsymbol{R}_k(\tau)e^{-2\pi is\tau}\mathrm{d}\tau \tag{2.12}$$

这正是 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{R}}(\tau)$ 的傅里叶变换，只要对负的光学深度 RF 定义为零。此方程可使我们直接处理 $\delta x_i(\tau)$ 的空间谱。将 $\delta x_k(\tau)$ 作傅里叶变换后代入方程 (2.12) 中便得

$$\delta\boldsymbol{I}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}F^{-1}\left[\boldsymbol{R}_k(\tau)\right]F\left[\delta x_k(\tau)\right]\mathrm{d}s \tag{2.13}$$

式中 $F$ 和 $F^{-1}$ 分别为傅里叶正、逆变换算符。此式可处理物理量的线性振荡和视线方向的周期性结构。

当把 $\boldsymbol{R}_i$ 运用到具体问题时可找出其表达式，如对 I 轮廓的等效宽度 $W$

$$R_k^W(\tau)=\frac{\Delta}{I_{\mathrm{c}}^2}\sum_{i=1}^{q-1}\left[R_k^{\mathrm{c}}(\tau)I(0;\lambda_i)-R_{k,1}(\tau;\lambda_i)I_{\mathrm{c}}\right] \tag{2.14}$$

其中 $\Delta$ 表示所取的波长间隔， $R_{k,1}$ 为 $\boldsymbol{R}_k$ 的第一个分量。由他们假定的大气模型和选取的中性铁线画出的贡献函数和响应函数的图形表明，贡献函数曲线拥有一个宽大的波形，而响应函数则出现尖锐的正负两个峰值。正的峰值表明被吸收的光子数增加，而负的峰值对应吸收过程。然后他们逐一对磁场强度大小、倾角和速度场的等效宽度响应函数 $R_H^w, R_\gamma^w, R_v^w$ 进行了考察。

最后他们给出了斯托克斯 V 轮廓极大值 $\mathrm{V}_{\max}$ 和其相应波长点 $\lambda_{\max}$ 的响应函数：

$$R_k^{V_{\max}}=R_k^{\mathrm{c}}+\frac{b}{4a^2}(bR_k^a-2aR_k^b) \tag{2.15}$$

$$R_k^{\lambda\max}=\frac{1}{2a^2}(bR_k^a-aR_k^b) \tag{2.16}$$

系数 $a, b, c$ 是对 $\lambda_{\max}$ 分别施行算符作用之后的结果。用斯托克斯 V 轮廓峰值间的波距 $d$ 的响应函数，考察 $d$ 对温度、磁场的反应是有意义的，因为在很多时候用 $d$ 来对磁场强度大小进行测量。结果发现，在假设的模型下，如果存在磁场梯度，$d$ 对温度相当敏感，因而温度结构可强烈影响以这种方法进行的磁场测量。用响应函数同样可以考察 Stenflo 发展起来的谱线比方法 [8] 的适用性。结论是：在假设的大气模型下，只要大气中不存在磁场梯度，那么这种方法是相当准确的；如果存在磁场梯度，谱线比技术导出的磁场强度对应的层次，与 $RF$ 的重心位置符合得较好，只要预先得知温度结构，便可对导出的磁场进行定位。用响应函数考察测量磁场强度的最后一个方法是波长重心法。它所确定的重心再次证明这种方法导出的磁场定位相当准确。

## 2 简 评

从以上的叙述可看出，响应函数从单纯考察一定深度处物理量发生小改变或扰动时作为其积分函数的表面观测量如何作出响应，已发展到可以诊断观测区域的物理量结构。其中关键的因素在于它能与推导方法紧密地结合在一起，这将在文 (III) 中讨论，而 Ruiz Cobo 和 del Toro Iniesta[12] 指出了其物理上内在的原因。从响应函数可以获得较多方面的信息，就这方面来讲其价值比贡献函数要大；另一方面，它并不能替代贡献函数，尽管两者都与一定深度范围的物理过程相联系，都可得出影响出射谱线的参量随深度变化的信息，但两者是从不同的角度探讨问题，因而在概念上不同。事实上，贡献函数概念的发展加深了我们对谱线形成的认识，尽管由它得出的形成深度只有有限的精度，但毕竟提供了这方面的信息。与贡献函数相似，响应函数的构造依赖于我们考察和计算的观测量，因而并不存在唯一的响应函数，对不同响应函数的应用可导出不同观测量的信息，所以由其导出的等效深度既非唯一又具有不同意义，当然我们必须区别这种深度和谱线等效形成深度的含义。

### 参 考 文 献


[1] Mein P. Solar Phys., 1971, 20: 3

[2] Beckers J M, Milkey R. Solar Phys., 1975, 43: 289

[3] Caccin B, Gomez M T, Marmolino C, Severino G. Astron. Astrophys., 1977, 54: 227

[4] Landi Degl' Innocenti E, Landi Degl' Innocenti M. Astron. Astrophys., 1977, 56: 111

[5] Landi Degl' Innocenti E, Landi Degl' Innocenti M. Solar Phys., 1972, 27: 319

[6] Sidlickovsky M. Bull. Astron. Inst. Czeck., 1976, 27: 71

[7] Landi Degl'Innocenti E, Landolfi M. Solar Phys., 1982, 77: 13

[8] Stenflo J O. Solar Phys., 1973, 32: 41

[9] Landi Degl'Innocenti E, Landolfi M. Solar Phys., 1983, 87: 221

[10] Grossmann-Doerth U, Larsson B, Solanki S K. Astron. Astrophys., 1988, 204: 266

[11] Sanchez Almaida J. Solar Phys., 1992, 137: 1

[12] Solanki S K, Bruls J H M J. Astron. Astrophys., 1994, 286: 269


(责任编辑 刘金铭 郭盛炽)

# Theory of Line Formation Depth and Its Application (II): the Development of Response Function

Qu Zhongquan　Ding Youji　Zhang Xiaoyu　Chen Xuekun

(*Yunnan Observatory, The Chinese Academy of Sciences, Kunming 650011*)

## Abstract

As the second paper of this series, the development of the concept of the response function is outlined and its meaning is discussed. The usage of the response function experiences a process from the stage of only observing the response of measured surface quantities by the perturbance of physical parameters at a certain depth to that of deriving the information on the line parameter structure. The role and the significance of the contribution function and response function are compared, and the reason why the latter function is superior to the former is pointed out in the derivation of the structure of the parameters .

**Key words**　line: formation—line: profiles—radiative transfer—Sun: magnetic field