

太阳系小天体运动的稳定区域

赵 长 印

(中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

刘 林

(南京大学天文系 南京 210093)

摘 要

概述了太阳系中卫星型、行星型和类 Trojan 群型小天体运动的稳定区域问题的现有研究成果,提出了几个有待于进一步深入研究的重要课题。

关键词 小行星 — 行星和卫星 — 稳定区域

分类号: P134

1 太阳系小天体的轨道分类和稳定性的定义

太阳系中除太阳和九大行星外,所有的自然天体均被称为太阳系小天体。按照轨道特征,这些小天体分为卫星型(包括大行星的卫星,小行星的卫星)、行星型(主要指大行星轨道间的小行星)、Trojan 群型小行星、彗星、流星、行星环等。本文阐述前三类主要小天体的运动状况。

在动力系统和天体力学中至少有 50 多种不同意义下的稳定性的定义^[1]、其中,与太阳系小天体运动的稳定区域直接有关的有 Hill 稳定性^[2]、轨道共振意义下的稳定性^[3]、实际稳定性^[4]等。Hill 稳定性是在平面圆型限制性三体问题模型的背景下,针对 Jacobi 积分的存在而提出的^[2],它是一种区域稳定性。轨道共振意义下的稳定性是指小天体能保持固有的天平动特征^[3]。而实际稳定性是 Giorgilli 等在研究空间限制性三体问题三角平动点的非线性稳定性时引入的一个新概念^[4]。小天体运动的稳定区域问题与行星卫星系统的保持、小行星的空间分布等太阳系动力演化的一系列重要问题密切相关。

2 卫星型小天体运动的稳定区域

2.1 卫星型小天体运动稳定区域的一些结果

在限制性三体问题(两个主天体 m_1 、 m_2 和一个小天体 m) 的模型下,当小天体 m 在较

小质量天体 m_2 围绕其运动时, 人们称 m 的运动为卫星型运动, 简称 S 型运动。太阳系天然卫星的运动即可简化为 S 型运动。圆型限制性三体问题存在一个著名的 Jacobi 积分, 当积分常数 $C > C_2$ (C_2 是速度为零时, 在 Lagrange 点 L_2 处 Jacobi 积分常数的值, 其表达式可见文献 [2]) 时, m 的运动在 Hill 意义下稳定 [2]。Szebehely 基于这一点, 对平面情况给出了 Hill 稳定的初始圆型卫星轨道最大半径的解析表达式 [5]:

$$R_{\max} = \left(\frac{\mu}{81}\right)^{1/3} \quad (1)$$

其中, $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ 为限制性三体问题的质量参数。Markellos 和 Roy 基于同样的想法, 进一步精化了 Szebehely 的结果, 对顺行 (指小天体绕 m_2 运动方向与 m_1 和 m_2 互相绕转方向一致) 和逆行情况, 分别给出了稳定范围 $R_{\max}^d$ 和 $R_{\max}^r$ [6]:

$$\begin{aligned} R_{\max}^d &= 1.4803 \left(\frac{\mu}{81}\right)^{1/3} \left[1 - 1.73 \left(\frac{\mu}{81}\right)^{1/3}\right] \\ R_{\max}^r &= 0.8428 \left(\frac{\mu}{81}\right)^{1/3} \left[1 - 0.55 \left(\frac{\mu}{81}\right)^{1/3}\right] \end{aligned} \quad (2)$$

对于太阳系, $\mu < 10^{-3}$, 天体 m_2 到内 Lagrange 点 L_2 的距离近似地为 [2],

$$R_2 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \quad (3)$$

如果定义行星的作用半径 $P = R_2$, 则有,

$$\begin{aligned} R_{\max}^d &\approx 0.49P \\ R_{\max}^r &\approx 0.28P. \end{aligned} \quad (4)$$

(7) Hill 意义下的稳定只是区域稳定的充分条件, 事实上, 人们采用平面圆型限制性问题模型, 对 S 型运动的大量数值计算更清楚地说明了这一点 [7-9], 对卫星初始轨道为圆的情况, 得出如下的结果,

$$A_{\max}^r \approx 2A_{\max}^d \approx P, \quad (5)$$

其中, $A_{\max}^r$ 和 $A_{\max}^d$ 分别为逆行和顺行卫星的实际稳定范围。从以上结果可以看出, 对顺行卫星, Hill 意义下的稳定范围与实际稳定范围基本一致; 但对逆行卫星, 实际稳定范围要比 Hill 意义下的稳定范围大得多, 而且比顺行卫星的稳定范围大一倍。关于这一问题, Innanen 曾作过简单的讨论 [10], 文献 [11] 也作过更进一步的解释, 但到目前为止, 尚无完全令人满意的解释。

2.2 太阳系天然卫星的稳定性

太阳系中, 除了水星和金星外, 大行星均有不同数目的天然卫星。随着空间探测的深入, 不断有新的卫星被发现, 如旅行者 2 号发现了位于天王星 ϵ 环两边的牧羊犬卫星等 10 颗小卫星 [12]。

如果把太阳, 各行星及其卫星系统简化成平面圆型限制性三体系统, 并且不考虑卫星轨道偏心率的影响, 那么, 利用表达式 (2) 可知, 除了木星的四个外层逆行卫星木卫十二 (Ananke)、木卫十一 (Carme)、木卫八 (Pasiphae) 和木卫九 (Sinope) 外, 太阳系所有已发现的, 较大的天然卫星 (未考虑新发现的小卫星) 的运动在 Hill 意义下均是稳定的 [13]。

太阳系小天体运动的稳定区域

赵 长 印

(中国科学院紫金山天文台 南京 210008)

刘 林

(南京大学天文系 南京 210093)

摘 要

概述了太阳系中卫星型、行星型和类 Trojan 群型小天体运动的稳定区域问题的现有研究成果,提出了几个有待于进一步深入研究的重要课题。

关键词 小行星 — 行星和卫星 — 稳定区域

分类号: P134

1 太阳系小天体的轨道分类和稳定性的定义

太阳系中除太阳和九大行星外,所有的自然天体均被称为太阳系小天体。按照轨道特征,这些小天体分为卫星型(包括大行星的卫星,小行星的卫星)、行星型(主要指大行星轨道间的小行星)、Trojan 群型小行星、彗星、流星、行星环等。本文阐述前三类主要小天体的运动状况。

在动力系统和天体力学中至少有 50 多种不同意义下的稳定性的定义^[1]、其中,与太阳系小天体运动的稳定区域直接有关的有 Hill 稳定性^[2]、轨道共振意义下的稳定性^[3]、实际稳定性^[4]等。Hill 稳定性是在平面圆型限制性三体问题模型的背景下,针对 Jacobi 积分的存在而提出的^[2],它是一种区域稳定性。轨道共振意义下的稳定性是指小天体能保持固有的天平动特征^[3]。而实际稳定性是 Giorgilli 等在研究空间限制性三体问题三角平动点的非线性稳定性时引入的一个新概念^[4]。小天体运动的稳定区域问题与行星卫星系统的保持、小行星的空间分布等太阳系动力演化的一系列重要问题密切相关。

2 卫星型小天体运动的稳定区域

2.1 卫星型小天体运动稳定区域的一些结果

在限制性三体问题(两个主天体 m_1 、 m_2 和一个小天体 m) 的模型下,当小天体 m 在较

小质量天体 m_2 围绕其运动时, 人们称 m 的运动为卫星型运动, 简称 S 型运动。太阳系天然卫星的运动即可简化为 S 型运动。圆型限制性三体问题存在一个著名的 Jacobi 积分, 当积分常数 $C > C_2$ (C_2 是速度为零时, 在 Lagrange 点 L_2 处 Jacobi 积分常数的值, 其表达式可见文献 [2]) 时, m 的运动在 Hill 意义下稳定 [2]。Szebehely 基于这一点, 对平面情况给出了 Hill 稳定的初始圆型卫星轨道最大半径的解析表达式 [5]:

$$R_{\max} = \left(\frac{\mu}{81} \right)^{1/3} \quad (1)$$

其中, $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ 为限制性三体问题的质量参数。Markellos 和 Roy 基于同样的想法, 进一步精化了 Szebehely 的结果, 对顺行 (指小天体绕 m_2 运动方向与 m_1 和 m_2 互相绕转方向一致) 和逆行情况, 分别给出了稳定范围 $R_{\max}^d$ 和 $R_{\max}^r$ [6]:

$$\begin{aligned} R_{\max}^d &= 1.4803 \left(\frac{\mu}{81} \right)^{1/3} \left[1 - 1.73 \left(\frac{\mu}{81} \right)^{1/3} \right] \\ R_{\max}^r &= 0.8428 \left(\frac{\mu}{81} \right)^{1/3} \left[1 - 0.55 \left(\frac{\mu}{81} \right)^{1/3} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

对于太阳系, $\mu < 10^{-3}$, 天体 m_2 到内 Lagrange 点 L_2 的距离近似地为 [2],

$$R_2 = \left(\frac{\mu}{3} \right)^{1/3} \quad (3)$$

如果定义行星的作用半径 $P = R_2$, 则有,

$$\begin{aligned} R_{\max}^d &\approx 0.49P \\ R_{\max}^r &\approx 0.28P. \end{aligned} \quad (4)$$

(V) Hill 意义下的稳定只是区域稳定的充分条件, 事实上, 人们采用平面圆型限制性三体问题模型, 对 S 型运动的大量数值计算更清楚地说明了这一点 [7-9], 对卫星初始轨道为圆的情况, 得出如下的结果,

$$A_{\max}^r \approx 2A_{\max}^d \approx P, \quad (5)$$

其中, $A_{\max}^r$ 和 $A_{\max}^d$ 分别为逆行和顺行卫星的实际稳定范围。从以上结果可以看出, 对顺行卫星, Hill 意义下的稳定范围与实际稳定范围基本一致; 但对逆行卫星, 实际稳定范围要比 Hill 意义下的稳定范围大得多, 而且比顺行卫星的稳定范围大一倍。关于这一问题, Innanen 曾作过简单的讨论 [10], 文献 [11] 也作过更进一步的解释, 但到目前为止, 尚无完全令人满意的解释。

2.2 太阳系天然卫星的稳定性

太阳系中, 除了水星和金星外, 大行星均有不同数目的天然卫星。随着空间探测的深入, 不断有新的卫星被发现, 如旅行者 2 号发现了位于天王星 ϵ 环两边的牧羊犬卫星等 10 颗小卫星 [12]。

如果把太阳, 各行星及其卫星系统简化成平面圆型限制性三体系统, 并且不考虑卫星轨道偏心率的影响, 那么, 利用表达式 (2) 可知, 除了木星的四个外层逆行卫星木卫十二 (Ananke)、木卫十一 (Carme)、木卫八 (Pasiphae) 和木卫九 (Sinope) 外, 太阳系所有已发现的, 较大的天然卫星 (未考虑新发现的小卫星) 的运动在 Hill 意义下均是稳定的 [13]。

由于太阳系天然卫星系统并非是一个严格的平面圆型限制性三体系统,而且在天然卫星系统中,普遍存在着轨道共振现象,如土卫六和土卫七间的两体共振,木星的三个内 Galilean 卫星间的三体共振,天王星的四个外层卫星间的四体共振现象等,天然卫星的运动是非常复杂的^[14]。长期以来,人们从不同角度,利用不同的方法,对太阳系天然卫星作了大量的研究工作^[14-17]。普遍认为,太阳系的天然卫星是相对稳定的,这意味着所有的天然卫星将不会从其母行星的附近逃逸,同时也意味着这些天然卫星间不会发生碰撞或轨道互相穿越。文献[13]的数值结果也表明,所有已发现的天然卫星是稳定的,除了木星的四个外层顺行卫星(J_{13}, J_6, J_{10}, J_7)、四个外层逆行卫星(J_{12}, J_{11}, J_8, J_9)、土星的逆行卫星 S_9 和月球外,所有其他天然卫星的轨道根数 a, e, i 变化幅度非常小,具有非常稳定的轨道。但这并不意味着问题已完全解决,对太阳系天然卫星运动的研究工作还需继续深入^[18,19]。

3 行星型小天体运动的稳定区域

3.1 行星型小天体运动的 Hill 稳定区域

文献[13]讨论了行星型小天体运动的 Hill 稳定区域问题,给出了内顺行(指绕大质量主天体运动,运动方向与主天体间的运动方向一致)、内逆行小天体及外顺行(指绕两主天体运动,运动方向与主天体间的运动方向一致)、外逆行小天体 Hill 稳定区域的解析结果,即:

$$\begin{aligned} \rho_{in}^d &< 1 - 3\alpha \\ \rho_{in}^r &< \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

和

$$\rho_{ou}^d > 1 + 2\sqrt{3}\alpha \quad (7)$$

其中, $\alpha = (\frac{\mu}{3})^{\frac{1}{3}}$, ρ_{in}^d 、 ρ_{ou}^d 分别为 Hill 稳定的顺行内、外小天体的轨道半径, ρ_{in}^r 为 Hill 稳定的逆行内小天体的轨道半径,而逆行外小天体不是 Hill 意义下稳定的。利用以上的表达式,文献[13]计算了太阳系各大行星附近小天体 Hill 稳定区域的边界值。给出的数值结果表明,对顺行轨道而言, Hill 稳定区域与实际稳定区域基本一致,但对逆行轨道来说,实际稳定区域比 Hill 稳定区域大得多,亦比顺行轨道的稳定区域大。这一点,与卫星型轨道的情况一致。

3.2 太阳系大行星间小行星的稳定性

太阳系中已发现的五千多颗小行星,除少数外,绝大多数处于火星与木星轨道之间,它们的分布具有鲜明的特征。如果用 α 表示小行星的轨道半径,那么大量的小行星都集中在主带($\alpha = 2.0-3.3\text{AU}$)中,在内带($\alpha = 1.5-2.0\text{AU}$)中几乎没有小行星存在,在外带($\alpha = 3.3-5.2\text{AU}$)中,只有在 $\alpha = 3.9$ 、 4.3 、 5.2AU 附近存在一些小行星,它们分别与 $3/2$ (Hilda)、 $4/3$ (Thule)、 $1/1$ (Trojan) 轨道共振相对应。在主带中, $\alpha = 2.5$ 、 2.81 、 2.95 、 3.3AU 处出现了明显的空隙,这就是著名的 Kirkwood 空隙,这些轨道半长径分别与 $3/1$ 、 $5/2$ 、 $7/3$ 、 $2/1$ 轨道共振相对应。长期以来,对太阳系小天体的研究主要集中在火星与木星轨道之间小行星的轨道动力演化上,特别是与小行星带分布中空隙与聚集现象相联系的轨道共振问题上。这些研究获得了非常丰富的理论与数值结果^[3,21-24]。近年来,人们对小行星带的研究又注意到长期共振问题上^[25,26]。

在对太阳系已发现的小天体研究的同时,人们也开始用数值模拟的方法讨论各大行星轨道间小天体稳定存在的可能性以及存在的范围。人们对太阳系大行星间在 4—40AU 的空间里顺行近圆轨道小天体存在的可能性,用不同的方法作了长期“跟踪”数值计算^[27-30]。特别是对木星轨道与土星轨道间,从 $(1.3-1.55)a_J$ (a_J 是木星轨道半长径) 范围内的顺行近圆轨道小天体的轨道演化作了重点讨论。Gladman 和 Duncan 对分布在 4—40AU 范围内的大约一千个试验质点的动力演化作了统计研究,他们给出的结论是,在这一范围内的大部分试验质点在受到行星摄动时,在 10^6 年的时间内逼近行星^[30]。Duncan 等人在试验质点的轨道半长径 a 和偏心率 e 满足

$$e \ll \varepsilon \left(= \frac{|a - a_p|}{a_p} \right) \ll 1 \quad (8)$$

的条件下 (a_p 为行星轨道半长径),对圆型限制性三体问题导出了一个保面积映射,由于利用映射的计算速度要比直接积分快(约 10^3 倍),他们利用这一映射对太阳系整个范围内的试验质点的稳定性问题作了长达 10^9 年时间段的数值计算,给出的结论是,大行星间的大部分试验质点(除主小行星带外)会穿越行星轨道^[27]。Franklin 等人着重讨论了 $(1.3-1.55)a_J$, 即 6.76—8.06AU 范围内小天体的运动稳定性问题^[28]。Weibel 等人也对木星与土星间 5.7—8.8AU 范围内小天体的动力演化作了讨论^[29]。尽管以上的讨论采用了不同的方法、不同的计算模型以及不同的稳定性标准,但是,得到的结论基本是一致的,即太阳系大行星间(除火星—木星间)顺行小天体的近圆轨道是不稳定的。基于太阳系存在稳定的逆行卫星,文献[31]对太阳系大行星间逆行小天体存在的可能性作了初步讨论,得到的结论是大行星间逆行小天体的近圆轨道比相应的顺行轨道稳定。

关于近地小行星的运动,人们所关心的主要问题是与几个大行星(特别是与地球)靠近甚至发生碰撞的可能性,该问题有其特殊性,本文暂不涉及此方面内容。

4 类 Trojan 群小天体运动的稳定区域

圆型限制性三体问题模型在两个有限体运动平面上存在两个三角平动点 L_4 、 L_5 ^[2]。已发现的木星的 Trojan 群小行星即在太阳与木星构成的限制性三体问题的三角平动点附近。

4.1 三角平动点的稳定性

长期以来,人们对两个三角平动点的稳定性作了大量研究,直到最近几年,平面圆型限制性三体问题模型下两个三角平动点的稳定性已被完全解决,空间模型下的这一问题还正在研究之中。

当限制性三体问题的模型参数(质量参数) $\mu \left(= \frac{m_2}{m_1+m_2} \right)$ 小于 Routh 质量比 $\mu_1 (= 0.038520896)$ 时,圆型限制性三体问题的三角平动点是线性稳定的^[2]。对平面圆型限制性三体问题,Deprit 和 Deprit-Bartholomé 利用 KAM 定理证明了在 $\mu \in (0, \mu_1)$ 中,除了相应于 2:1 通约的质量参数 $\mu_2 (= 0.024293897)$ 、相应于 3:1 通约的 $\mu_3 (= 0.013516016)$ 和临界质量参数 $\mu_c (= 0.01091367)$ 外,三角平动点是非线性稳定的^[32]。随后,Markeev 和 Alfriend 利用两个变量展开的方法,通过判别二阶解系数是否有界给出了当 $\mu = \mu_2$ 、 μ_3 时,三角平动点非线性不稳定的结论^[33-35]。1986 年, Meyer 和 Schmidt 借助于计算机,将哈密顿系统的标准型化到更高阶,证明了当 $\mu = \mu_c$ 时, KAM 定理中的 $D_6 \neq 0$,从而给出了当 $\mu = \mu_c$ 时,三角平动点是非线性

稳定的结论^[36]。这样,平面情况下,三角平动点的稳定性问题就完全解决了。

对于具有三个自由度的空间圆型限制性三体问题,由于 Arnold 扩散,利用 KAM 定理不能给出三角平动点通常意义下的稳定性。1989 年, Giorgilli 等人引入了实际稳定性的概念,通过一系列复杂的估计,给出了哈密顿系统椭圆不动点实际稳定性显的估计式,并且把这一估计式应用到空间圆型限制性三体问题的稳定性问题上,对太阳—木星系统,得到了在 2×10^{10} yr 的时间间隔中(相当于现在估计的宇宙年龄的量级)三角平动点存在一个大约几 km 的稳定区域的结论^[37]。随后, Celletti 和 Giorgilli 通过更精细的估计,改进了以前的结果,对太阳—木星系统,给出了一个较大的稳定区域^[38],其范围仅相当于已经发现的 Trojan 群小行星存在范围的 1/2500。

4.2 三角平动点的稳定区域

尽管在讨论空间限制性三体问题三角平动点的稳定性时,有些工作也涉及到稳定范围问题,但是,这些工作强调的仍是运动稳定性而不是稳定范围。总的来说,到目前为止,人们对三角平动点稳定范围问题得到的结论还不多。当然,要严格给出平动点的稳定范围是非常困难的。Mckenzie 和 Szebehely、Szebehely 和 Premkumar 用数值方法分别讨论过地球—月球系统三角平动点在位形空间及速度空间的稳定区域问题^[39,40]。随后, Whipple 通过分析 Jacobi 积分,给出了相应系统在位形空间稳定范围的上边界^[41]。对于太阳系各大行星三角平动点附近的稳定范围问题,Zhang 和 Innanen 曾通过数值计算进行了讨论,得到了一些结果^[42,43]。

由于三角平动点附近小天体的运动与 1/1 轨道共振相对应,我们从 1/1 轨道共振的观点出发,对太阳系各大行星的类 Trojan 群小天体存在的可能性及稳定范围作了详细讨论^[44-46]。在得到 1/1 理想共振模型的基础上,给出了其共振带半宽度(通常为平动区的半宽度) d 的表达式^[44,46]:

$$d = \sqrt{\frac{2}{3}\mu(1-\mu)^{2/3}} \approx \sqrt{\frac{2}{3}\mu} \quad (9)$$

其中, μ 为各大行星与太阳形成的限制性三体问题的质量参数。在得到表达式 (9) 的基础上,采用较实际的动力模型,文献 [45] 和 [46] 给出了大行星三角平动点实际稳定区域的数值结果,即:

- 外行星(除冥王星)各自的三角平动点附近,存在一个较大的稳定区域。木星三角平动点的实际稳定区域为理想情况下的 2/3 至 3/4,而土星、天王星、海王星对应的稳定区域为理想情况下的 4/5 至 1,处于这些区域的类 Trojan 群小天体在长时间里轨道半长径、轨道偏心率及轨道倾角存在有规律的、周期性的变化。
- 内行星水星和金星三角平动点附近,存在一个相对较小的稳定范围,实际稳定区域为理想情况下的 1/4 左右。处于这些区域内的类 Trojan 群小天体的轨道偏心率有一个相当长的变化周期,变化幅度较大。
- 内行星地球和火星的附近区域内的类 Trojan 群小天体,由于受到木星的较强摄动,大部分小天体不能长期稳定存在。

以木星附近区域内已发现的 Trojan 群小天体为背景,文献 [47] 考虑小天体间的相互影响,讨论了这些小天体的运动状况,得到的初步结论是,在目前估计的这些小天体质量的量级下,

不是非常靠近的小天体能够在木星三角平动点邻近共同稳定存在。

5 有待进一步深入研究的课题

太阳系小行星和行星卫星系统的运动及稳定性问题, 是太阳系动力演化的重要研究内容。其中有待深入研究的课题有: 对主小行星带中小天体空间分布特征的进一步的理论解释; 对逆行和顺行卫星以及可能存在的逆行和顺行小行星实际稳定区域差别的理论解释; 外行星的类 Trojan 群小天体的搜寻和稳定性分析。除此之外, 对近地小天体的搜索和精密历表的计算以及这些小天体与地球接近和碰撞可能性分析, 也是一个热点课题。

参 考 文 献

- 1 Szebehely V. Stability of the Solar System and its Minor Natural and Artificial Bodies. Austin: University of Texas, 1985
- 2 Szebehely V. Theory of Orbits. New York: Academic press, 1967
- 3 廖新浩, 刘林. 紫金山天文台台刊, 1989, 8: 229
- 4 Giorgilli A, Delshmas A, Fontich E et al. J. Diff. Eq., 1989, 77: 167
- 5 Szebehely V. Celest. Mech., 1978, 18: 383
- 6 Markellos V V, Roy A E. Celest. Mech., 1981, 23: 269
- 7 Henon M. Astron. Astrophys., 1970, 9: 24
- 8 Benest D. Astron. Astrophys., 1971, 13: 157
- 9 Markellos V V. Celest. Mech., 1974, 10: 87
- 10 Innanen K A. A. J., 1980, 85: 81
- 11 刘林, 赵长印. 紫金山天文台台刊, 1993, 12: 37
- 12 Owen Jr W M, Synnott S P. A. J., 1987, 93: 1268
- 13 赵长印, 博士论文, 南京: 南京大学, 1992
- 14 Burns J A. Planetary Satellites. Arizona: The University of Arizona, 1979
- 15 Yoder C F. Nature, 1979, 279: 767
- 16 Sinclair A T. Astron. Astrophys., 1984, 136: 161
- 17 Duriez L. Celest. Mech., 1987, 43: 331
- 18 Boronenko T S, Schmidt J B. Celest. Mech., 1990, 48: 289
- 19 Kinoshita H, Nakai H. Celest. Mech., 1991, 52: 293
- 20 Gehres T. Asteroids. Arizona: The University of Arizona, 1979
- 21 Moser J. A. J., 1958, 63: 439
- 22 Dermott F S, Murray C D. Nature, 1983, 301: 201
- 23 Morbidelli A, Giorgilli A. Celest. Mech., 1990, 47: 145
- 24 Morbidelli A, Giorgilli A. Celest. Mech., 1990, 47: 173
- 25 Froeschlé Ch, Scholl H. Astron. Astrophys., 1990, 227: 255
- 26 Morbidelli A, Henrard J. Celest. Mech., 1991, 51: 169
- 27 Duncan M, Quinn T, Tremaine S. Icarus, 1989, 82: 402
- 28 Franklin F, Lecar M, Soper P. Icarus, 1989, 79: 223
- 29 Weibel W M, Kaula W M, Newman W I. Icarus, 1990, 83: 382
- 30 Gladman B, Duncan M. A. J., 1990, 100: 1680
- 31 赵长印, 刘林. 天文学报, 1994, 35: 434
- 32 Deprit A, Deprit-bartholomé A. A. J., 1967, 72: 173
- 33 Markeev A P. Appl. Math. Mech., 1969, 33: 105
- 34 Alfried K T. Celest. Mech., 1970, 3: 351

- 35 Alfriend K T. *Celest. Mech.*, 1971, 4: 60
- 36 Meyer K R, Schmidt D S. *J. Diff. Eqs.*, 1986, 62: 222
- 37 Giorgilli A, Delshams A, Fontich E et al. *J. Diff. Eqs.*, 1989, 77: 167
- 38 Celletti A, Giorgilli A. *Celest. Mech.*, 1991, 50: 31
- 39 Mckenzie R, Szebehely V. *Celest. Mech.*, 1981, 23: 223
- 40 Szebehely V, Premkumar R. *Celest. Mech.* 1982, 28: 195
- 41 Whipple A L. *Celest. Mech.*, 1983, 30: 385
- 42 Zhang S P, Innanen K A. *A. J.*, 1988, 96: 1983
- 43 Zhang S P, Innanen K A. *A. J.*, 1988, 96: 1989
- 44 赵长印, 刘林. *天文学报*, 1993, 34: 45
- 45 赵长印, 刘林. *天文学报*, 1994, 35: 76
- 46 Zhao Zhangyin, Liu Lin. *Icarus*, 1992, 100: 136
- 47 赵长印, 刘林. *紫金山天文台台刊*, 1993, 12: 163

The Stable Region of the Motion of Minor Bodies in the Solar System

Zhao Zhangyin

(Purple Mountain Observatory, The Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008)

Liu Lin

(Astronomy Department, Nanjing University, Nanjing 210093)

Abstract

In this paper, existing research results on the stable region of minor bodies in the solar system are summarized. These minor bodies include satellite type, planetary type and Trojan-like group bodies. Some future research topics on this field are also suggested.

Key words minor planets, asteroids—planets and stellites: general—stable region