第 17 卷 第 4 期
1999 年 12 月

天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol.17, No.4
Dec., 1999

适用于人造卫星轨道数值积分的线性多步法的研究

徐 继 鸿

(中国科学院乌鲁木齐天文站 乌鲁木齐 830011)
(中国科学院国家天文观测中心 北京 100012)

摘 要

总结了多年来构造适合卫星轨道计算的线性多步积分方法的研究进展；介绍了在构造积分公式的过程中选取伪根的三条原则。结合具体算例，对推荐的适用于不同类型卫星轨道的五组线性多步积分公式的性能与对称方法及科威尔方法作了详细地比对和评述。

关 键 词 人造卫星轨道 — 线性多步法 — 构造

分 类 号： P173.1

1 引 言

计算卫星轨道的方法通常有三种即分析方法、数值方法和半分析半数值方法。分析方法可以给出分析解，运动规律一目了然，优点是显见的。但对于卫星的实际轨道，方程右端常有很多项，非常繁杂，此时，人们常用数值方法。数值积分方法大致可分为单步法和多步法两种，单步法稳定性好但需耗费大量机时，除非特殊需要，一般都使用效率较高的多步法。

日本国立东京天文台 Kinoshita 教授指出 [10]，到 1989 年为止，国际天文学界使用得最为广泛的数值积分方法仍然是科威耳 (Cowell) 方法 (使用率约为 20%)。遗憾的是，科威耳方法的数值稳定性并不好，其由初值误差引起的沿迹误差大致按时间 t 的平方增长。为控制沿迹误差的增长，不少人提出了各自的稳定化方法 [4,5,7]，在一定的条件下具有明显效果。

针对科威耳方法的这种固有的缺陷，为了精确求解特殊二阶常微分方程 $y'' = f(t,y)$ 的初值问题，从 1991 年起，笔者与合作者一起从事了新的数值积分方法的研制工作。按照研究发现的伪根在单位圆内对称选取的原则建立了一套生成及优选数值积分公式的方法和软件，接着从卫星轨道计算工作的实际需要出发推荐了几组积分系数。计算结果表明，其在较长间隔的卫星轨道积分中精度明显好于科威耳方法 (见文献 [2])，与国际上 90 年代才出现的对称 (Symmetric) 方法 [1] 相比也是各有千秋 [3]。

对于带耗散力的运动方程，科威耳方法和对称方法的计算结果都不太好。其中，耗散力因子 ε 的值越大，计算结果的可靠性也就越低。众所周知，对于卫星轨道的计算，一般都要

1998-04-10 收到

考虑耗散力 (例如大气阻力摄动、太阳光压摄动等)，因此，很有必要探讨适合带耗散力的卫星轨道数值积分公式的构造问题。1995 年以来，笔者开始致力于这项工作，并且取得了重要的阶段性成果。1997 年推荐了一组积分公式 [6]，当将它用于带耗散力的简谐振动时，其运动方程长间隔数值积分的相对误差的绝对值增长缓慢，积分效果远比上述国外的两种方法要好。但对于带耗散力的卫星轨道，其计算结果虽有改善但还不够理想。于是，继续寻求适合带耗散力的运动方程积分的积分公式，并于 1998 年取得了新的进展。

大偏心率卫星轨道虽不多见，但在卫星发射阶段及某些特殊情况下时有出现。虽可用变步长或正规化方法克服此类卫星轨道数值积分的困难，但寻求更加适合大偏心率卫星轨道积分的线性多步积分公式也是有意义的。

2　线性多步积分公式的构造 [2]

2.1　构造线性多步积分公式的方法

最简化的卫星轨道，其数学模型是二阶常微分方程的初值问题：

$$y'' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \tag{1}$$

线性多步法的实质就是采用牛顿向后插值多项式代替被积函数，将微分方程转化为后向差分形式或线性差分方程形式，从而得到微分方程的近似解。用差分方程形式表示的 k 阶线性多步积分公式为

$$\begin{aligned} &\alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \alpha_{k-2} y_{n+k-2} + \cdots + \alpha_0 y_n \\ &\quad = h^2(\beta_k f_{n+k} + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \beta_{k-2} f_{n+k-2} + \cdots + \beta_0 f_n) \end{aligned} \tag{2}$$

方程左端可以抽象成为第一特征多项式

$$\rho(\xi) = \alpha_k \xi_k + \alpha_{k-1} \xi_{k-1} + \cdots + \alpha_0 \xi_0 \tag{3}$$

第一特征多项式有两个主根，取值为 1 。其它的根称之为伪根。

方程右端可以抽象成为第二特征多项式

$$\sigma(\xi) = \beta_k \xi_k + \beta_{k-1} \xi_{k-1} + \ldots + \beta_0 \xi_0 \tag{4}$$

方程 (3) 和 (4) 必须满足条件

$$\alpha_k \neq 0, \quad |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0 \tag{5}$$

我们的目的是在一定条件下建立 (3) 式和 (4) 式之间的联系：首先选定 $\rho(\xi)$ 的伪根，再加上两个不可选择的主根 1 ，就可确定 $\rho(\xi)$ ，再由确定的 $\rho(\xi)$ 去找到相应的 $\sigma(\xi)$ ，便构造出一组积分公式。在文献 [2] 中我们已经详细地给出了采用最大阶算子方法构造线性多步积分公式的具体做法，这里不再重述。

2.2　伪根选取的原则

由上节可知，选定了第一特征多项式的根 (两个主根为 1 ，其余的根是伪根，可选择) 就可以求得一批线性多步积分公式的系数，从而确定一组线性多步积分公式。科威耳方法的伪根全

部放在原点。对称方法的伪根又都在单位圆上选取。为得到性能更好的数值积分公式，决定扩大搜索范围，在单位圆内选取伪根。以下是笔者在单位圆内选取伪根所遵循的三条原则：

(1) 伪根的模应尽可能地在单位圆内选得大一些。

(2) 单根选在实轴上，单根的模应取成小量。

(3) 伪根和主根在单位圆内的分布应尽可能地对单根对称。

3 适合不同类型卫星轨道数值积分的线性多步积分公式

3.1 适合长间隔卫星轨道数值积分的线性多步积分公式

按自定的伪根选取的三原则在单位圆内选取伪根，首先找到的是文献 [2] 方法和文献 [3] 方法 (积分系数见原文) 。现将这两种方法与科威耳方法、对称方法在不同间隔时的比对结果列于表 1 。因是二体问题，比对标准采用分析解。坐标系、单位制的选取见文献 [2](同人卫常规) ，未注明处步长皆取为 1min ； $\Delta\lambda$ 表示沿迹积分误差。

表 1 二体问题中不同积分方法、不同积分间隔时的积分误差 $\Delta\lambda$ 比对

初值： $a_0 = 1.302$, $e_0 = 0.054$

积分间隔 /d		对称方法	科威耳方法	文献 [3] 方法	文献 [2] 方法
$\lambda_0 = 4.56$	4	−2.7D − 12	1.0D − 13	−8.0D − 13	−3.0D − 13
	30	−1.3D − 11	−2.0D − 10	−3.6D − 11	1.3D − 11
	100	−1.3D − 10	−2.4D − 11	−9.0D − 11	9.0D − 11
	1000	−6.8D − 9	1.4D − 7	−1.9D − −9	1.7D − 9
	5000	5.7D − 8	2.4D − 6	−4.2D − −8	−1.2D − 7
$\lambda_0 = 5.95$	4	−2.2D − 11	9.0D − 12	1.2D − 12	6.0D − 13
	30	−1.3D − 10	1.2D − 10	1.4D − 11	9.0D − 12
	100	−5.8D − 10	8.0D − 10	1.6D − 10	1.5D − 10
	1000	−1.3D − 8	7.6D − 8	−1.0D − 8	−4.9D − 9
	5000	−1.8D − 7	1.2D − 6	1.6D − 7	−1.2D − 7

由表 1 可以看出： (1) 对于短间隔 (1000 d 以内) 积分，对称方法积分精度不如文献 [2] 与文献 [3]; 相对于文献 [2] 和文献 [3] 方法而言，对称方法的重要缺陷是它的积分精度受 λ_0 的影响较大 [3] ，在积分间隔不太长时影响就格外地显著。卫星轨道计算的积分间隔不可能太长， λ_0 又必然要经常地变换，在这样的情况下，文献 [2] 方法与文献 [3] 方法比对称方法要好。 (2) 积分间隔较长时，科威耳方法的积分精度相对较低，对称方法与文献 [2] 、[3] 方法的积分精度相对较高。

3.2 适合带耗散力近地卫星轨道数值积分的线性多步积分公式

带耗散力的卫星轨道，其运动方程为 $y'' = f(t, y, \varepsilon y')$, 初始条件是 $y(t_0) = y_0$ ， $y'(t_0) = y'_0$ 。对于带耗散力的运动方程，由于其分析解表达式 (假定存在分析解) 的实部大于零 (含有因子 $e^{-\varepsilon t}$) ，此时，科威耳方法和对称方法的计算结果都不太好。为此，文献 [6] 曾推荐了一组积分公式，将它用于带耗散力的卫星轨道，其计算结果虽有改善但还不够理想。现在，我们重新推荐一组积分系数，它是对文献 [6] 中积分公式的微调，为区别于其它方法，称之为 DFM (Dissipation Force Method) 。

伪根值：

$r_1 = 0.9D0$, $\Phi_1 = 3.141592653589793D0$;
$r_2 = 0.982D0$, $\Phi_2 = 1.570796326794897D0$;
$r_3 = 0.05D0$, $\Phi_3 = 0.0D0$;
$r_4 = 0.982D0$, $\Phi_4 = 1.570796326794897D0$;
$r_5 = 2.015D-9$, $\Phi_5 = 1.570796326794897D0$;

积分系数：

$\alpha_{11} = 1.0D0$, $\beta_{11} = 5.650677062250094D-2$;
$\alpha_{10} = 2.500000000000000D-1$, $\beta_{10} = 1.130757999718295D0$;
$\alpha_9 = -1.486480000000001D-1$, $\beta_9 = 1.309536242204563D0$;
$\alpha_8 = 2.126620000000000D-1$, $\beta_8 = 3.571166775309869D0$;
$\alpha_7 = 1.702072663024000D0$, $\beta_7 = 1.770103090610795D0$;
$\alpha_6 = -2.467904417560000D-1$, $\beta_6 = 3.922788930444964D0$;
$\alpha_5 = 1.104119350172800D-1$, $\beta_5 = 2.296437229096377D-1$;
$\alpha_4 = -1.725034053950317D-1$, $\beta_4 = 1.480860903417893D0$;
$\alpha_3 = -7.448665423577763D-1$, $\beta_3 = -3.171670247450007D-1$;
$\alpha_2 = 3.766179146752800D-2$, $\beta_2 = 9.514116110244172D-2$;
$\alpha_1 = -3.024325756944602D-18$, $\beta_1 = -1.786548580115976D-2$;
$\alpha_0 = 1.529153472612440D-19$, $\beta_0 = 1.488534844393793D-3$;

对于带耗散力的卫星轨道，这时没有分析解，比对标准采用 1/10 步长的龙格－库塔方法的结果；为避免有误，曾参照文献 [4] 、文献 [5] 的做法，采用能量常数及其逐步变化来修正轨道半长径 a 以提高积分精度，以此协同比对标准给出了表 2 、表 3 和表 4.

表 2　考虑大气阻力摄动，不同积分方法、不同积分间隔时的积分误差 $\Delta\lambda$ 比对

初值：$a_0 = 1.062$, $e_0 = 0.054$, $\lambda_0 = 5.96$, $\rho = 1.0D-3$, 面质比 $dcx = 0.01$

积分间隔 /d	对称方法	科威耳方法	文献 [2] 方法	文献 [6] 方法	DFM
4	$-1.2D-9$	$1.7D-10$	$8.0D-12$	$-2.8D-11$	$2.3D-11$
10	$-3.0D-9$	$-4.0D-10$	$-3.3D-10$	$-5.5D-10$	$-2.3D-10$
30	$-9.3D-9$	$-7.0D-9$	$-5.0D-10$	$-2.3D-9$	$6.3D-10$
100	$-3.5D-8$	$-4.6D-7$	$-2.1D-8$	$-3.8D-8$	$2.8D-9$

表 3　考虑大气阻力摄动，不同积分方法、不同积分间隔时的积分误差 $\Delta\lambda$ 比对

初值：$a_0 = 1.062$, $e_0 = 0.054$, $\lambda_0 = 5.96$, $\rho = 1.0D-3$, $dcx = 0.05$

积分间隔 /d	对称方法	科威耳方法	文献 [2] 方法	文献 [6] 方法	DFM
4	$-1.2D-9$	$1.7D-10$	$1.2D-11$	$-2.3D-11$	$2.8D-11$
10	$-3.3D-9$	$-8.1D-10$	$-1.3D-10$	$-3.6D-10$	$-9.0D-12$
30	$-6.0D-9$	$-1.9D-7$	$-5.5D-9$	$-6.7D-9$	$-2.4D-9$
48	$2.1D-6$	$-1.3D-5$	$-1.2D-1$	$-5.3D-7$	$-5.2D-7$
50	溢出	$3.0D-5$	$-4.5d0$	$-3.8d0$	$1.5D-1$

对于带耗散力的近地卫星的运动轨道 (积分间隔一般不会太长) ，由表 2～ 4 可见：

(1) DFM 的积分精度高、性能好，其主要表现是：在相应的沿迹误差 $|\Delta\lambda|-$ 步长 h 变化图中 [6] ，相对于其它方法而言， DFM 的低值区范围更宽、极值点对应的步长值更大，积分过程中即使选取较大的积分步长，也能保持很高的积分精度，又可节省机时，值得推荐使用。

(2) 文献 [2] 方法积分精度也比较高 (文献 [3] 与之相当，比对数据从略) 。

(3) 科威耳方法积分结果不易失真，表现出良好的适应能力，但它的积分精度相对较低。

(4) 对称方法积分精度最低。

表 4 考虑大气阻力摄动，不同积分方法、不同积分步长时的积分误差 Δλ 比对
积分间隔固定为 10d，其它初值同表 3

积分步长 /min	对称方法	科威耳方法	文献 [2] 方法	文献 [6] 方法	DFM
0.5	−1.5D − 10	4.0D − 11	−1.1D − 10	−7.2D − 10	−7.5D − 11
0.6	−1.5D − 10	−7.0D − 11	−1.2D − 10	−6.0D − 10	−6.0D − 11
0.7	−1.7D − 10	7.2D − 11	−1.0D − 10	−4.9D − 10	−3.6D − 11
0.8	−3.7D − 10	−3.4D − 10	−2.1D − 10	−4.6D − 10	−5.0D − 11
0.9	−1.0D − 9	−2.8D − 10	−1.3D − 10	−4.3D − 10	−3.0D − 11
1.0	−3.3D − 9	−8.1D − 10	−1.3D − 10	−3.6D − 10	−9.0D − 12
1.1	−9.1D − 9	−2.8D − 9	−1.9D − 10	−3.2D − 10	4.6D − 12
1.2	−2.4D − 8	−8.9D − 9	−2.4D − 10	−3.5D − 10	−4.0D − 11
1.3	−5.8D − 8	−2.7D − 8	−5.0D − 10	−4.6D − 10	−2.0D − 10
1.4	−1.1D − 7	−7.4D − 8	−1.6D − 9	−1.5D − 9	−1.2D − 9
1.5	−1.3D − 7	−1.9D − 7	−5.3D − 9	−4.7D − 9	−4.4D − 9

3.3 适合大偏心率卫星轨道数值积分的积分公式

为寻找适合大偏心率卫星轨道的数值积分方法，我们做了很多工作，这里，提供一组积分系数，为与其它方法相区别，称之为 LEM (Large Eccentricity Method).

伪根值：

$$r_1 = 0.867D0, \quad \Phi_1 = 3.141592653589793D0;$$
$$r_2 = 0.9335D0, \quad \Phi_2 = 1.570796326794897D0;$$
$$r_3 = 0.0665D0, \quad \Phi_3 = 0.0D0;$$
$$r_4 = 0.9335D0, \quad \Phi_4 = 1.570796326794897D0;$$
$$r_5 = 0.9335D0, \quad \Phi_5 = 1.570796326794897D0;$$

积分系数：

$$\alpha_{11} = 1.0D0, \quad \beta_{11} = 5.664519294691492D-2;$$
$$\alpha_{10} = 3.325000000000005D-1, \quad \beta_{10} = 1.123297044202890D0;$$
$$\alpha_9 = -9.156447500000005D-1, \quad \beta_9 = 1.281412958166787D0;$$
$$\alpha_8 = 5.244870128750004D-1, \quad \beta_8 = 4.192590058384089D0;$$
$$\alpha_7 = 1.426168165033312D0, \quad \beta_7 = 2.666277739580922D0;$$
$$\alpha_6 = -9.382031483521490D-2, \quad \beta_6 = 5.692779500587027D0;$$
$$\alpha_5 = 1.282922098689820D0, \quad \beta_5 = 2.064745629556538D0;$$
$$\alpha_4 = -4.346926140542156D-1, \quad \beta_4 = 3.101272487032615D0;$$
$$\alpha_3 = -5.534648294639445D-1, \quad \beta_3 = 5.959268239999367D-1;$$
$$\alpha_2 = -1.142609023729197D-1, \quad \beta_2 = 5.736354696848982D-1;$$
$$\alpha_1 = -4.872723633164632D-1, \quad \beta_1 = -2.113626004734034D-2;$$
$$\alpha_0 = 3.307849744462552D-2, \quad \beta_0 = -1.008659574608434D-3;$$

LEM 与其它积分方法在不同偏心率时的积分误差比对结果列于表 5 和表 6 。因是二体问题，比对标准采用分析解。

对于大偏心率卫星轨道，由表 5 、表 6 可以看出：

(1) 对称方法的积分精度最差.

(2) 科威耳方法的积分精度较低.

(3) LEM 明显优于对称方法和科威耳方法，也好于文献 [2] 方法和 DFM 方法，可选用.

表 5　二体问题中不同积分方法、积分不同偏心率卫星轨道时的积分误差 $\Delta\lambda$ 比对

初值：$a_0 = 1.062$，$\lambda_0 = 5.95$；积分间隔 4d

卫星偏心率	对称方法	科威耳方法	文献 [2] 方法	LEM	DFM
0.45	溢出	−2.8D − 3	−5.2D − 4	−3.2D − 4	−2.1D − 4
0.35	−1.4D − 4	−3.5D − 5	−5.9D − 6	−3.5D − 6	−5.5D − 6
0.25	−7.3D − 6	5.3D − 7	2.2D − 9	−2.0D − 9	2.2D − 9
0.15	−1.8D − 7	−2.8D − 8	2.0D − 9	1.4D − 9	1.8D − 9

表 6　二体问题中不同积分方法、积分不同偏心率卫星轨道时的积分误差 $\Delta\lambda$ 比对

初值：$a_0 = 1.302$，$\lambda_0 = 5.95$；积分间隔 4d;

卫星偏心率	对称方法	科威耳方法	文献 [2] 方法	LEM	DFM
0.55	溢出	1.0D − 2	1.8D − 4	−1.2D − 4	−2.0D − 4
0.45	−1.8D − 4	1.7D − 4	8.1D − 6	4.2D − 6	7.6D − 6
0.35	−1.4D − 5	3.1D − 6	2.0D − 7	1.1D − 7	1.8D − 7
0.25	−3.0D − 7	6.2D − 8	4.2D − 9	2.4D − 9	4.0D − 9

4　结　　语

我们前后共推荐了五组积分公式，并将它们与经典的科威耳方法和新颖的对称方法作了多侧面的计算对比，可以给出如下评语：

(1) 尽管对称方法适用于超长间隔的大行星轨道积分，但不能用来计算大偏心率或带耗散力的近地卫星轨道。

(2) 科威耳方法不宜用来计算较长积分间隔的卫星轨道。当其用于大偏心率或带耗散力的近地卫星轨道时，计算结果不易失真，表现出良好的适应能力，但它的积分精度相对较低。

(3) 对于近地卫星的实际运动轨道 (轨道半长径不大、偏心率可大可小、耗散力参数因子的数值可大可小、积分间隔显然不会太长)，此时，在相应的沿迹误差 $|\Delta\lambda|$- 步长 h 的变化图中，相对于其它方法而言，DFM 的低值区范围更宽、极值点对应的步长值更大，因而积分过程中即使选取较大的积分步长，也能保持很高的积分精度，又可以节省机时，显见，对近地卫星，DFM 性能更好，值得推荐使用。

(4) 对于大偏心率的卫星轨道，LEM 积分精度较高，可选择使用。

(5) 文献 [2] 方法 (文献 [3] 方法与之相当) 虽在某些单项上不及 DFM 或 LEM，但它性能全面，适用范围要更广一些。对于卫星轨道，只要积分间隔不是非常大 (譬如说不超过 60000 个周期，周期若为 2h，则相当于 5000 d，实际上卫星轨道的积分间隔不会超出这个范围)，无论偏心率是大是小、轨道半长径是大是小、耗散力参数因子是大是小，该方法都有相当高的积分精度。可见，该方法的数值稳定性较好，应予推广使用。

总之，针对卫星轨道计算的实际需要，通过调整伪根来构造新的数值积分公式，是一项有应用前景的工作。它提示我们：为能构造出性能更好的线性多步积分公式，就不能停留在试算探索阶段，而必须要运用“混沌动力学”中的新概念、新思路、新方法 [7,8,11,16,17]，去定性地研究伪根在单位圆内的分布与数值积分方法性能之间的相关性 (混沌结构)。

致谢：张阿丽同志、黄天衣老师曾参加过部分前期工作，特此致谢。

参 考 文 献

1 Quinlan G D, Tremaine S. A. J., 1990, 100: 1694
2 徐继鸿，张阿丽. 天文学报，1994, 35: 84
3 Xu Jihong, Zhang Ali. Ap. J. Suppl. Ser., 1995, 225: 289
4 刘 林，天文学报，1987, 28: 215
5 黄天衣，丁 华. 天文学报，1981, 22: 328
6 徐继鸿，张阿丽，黄天衣. 紫金山天文台台刊，1998, 17: 28
7 郝柏林. 从抛物线谈起 —— 混沌动力学引论，上海：上海科技教育出版社，1993
8 刘曾荣. 混沌的微扰判据，上海：上海科技教育出版社，1994
9 Henrici P. 常微分方程离散变量方法，包雪松等译，北京：科学出版社，1985
10 Kinoshita. Celest. Mech., 1989, 45: 231
11 杨维明. 时空混沌和耦合映象格子，上海：上海科技教育出版社，1994
12 徐继鸿等. 天文学报，1989, 30: 133
13 Huang Tianyi, Innanen K A. A. J., 1983, 88: 870
14 Huang Tianyi, Valtonen. M. Celest. Mech., 1988, 42: 223
15 Benet L, Trautmann D, Celest. Mech. Dyn. Astron, 1997 66: 203
16 顾 雁. 量子混沌，上海：上海科技教育出版社，1996
17 汪秉宏. 弱混沌与准规则斑图，上海：上海科技教育出版社，1996

Studies on Linear Multistep Algorithm for the Orbital Integration of Artificial Earth Satellites

Xu Jihong

(Urumqi Astronomical Observatory, The Chinese Academy of Sciences, Urumqi 830011)

(National Astronomical Observatories, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012)

Abstract

The progress in my studies on linear multistep algorithm for the orbital integration of artificial earth satellites are summeried. Three basic principles are introduced to determine the spurious roots of the eigen-polynomial. Five linear multistep integrators are recommended to use in practice, and they have obvious advantages over both symmetric and Cowell methods by means of their comparisons each other.

Key words artificial satellite orbit—linear multistep algorithm—construction