

# 星系盘厚度效应的研究

彭秋和<sup>1,2</sup> 罗新炼<sup>1</sup> 彭芳<sup>1</sup> 龙旻<sup>1</sup>

(1. 南京大学天文系 南京 210093)

(2. 中国科学院 - 北京大学联合北京天体物理中心 北京 100871)

## 摘 要

在三维引力 Poisson 方程严格解基础上, 探讨了有限厚星系盘基盘的动力学性质, 并进一步讨论了盘的厚度效应对银河系所需晕质量的影响。研究了扰动盘的动力学性质, 通过将扰动引力势 Poisson 方程的严格解与林家翘、徐遐生提出的自维持密度波理论相结合, 建立了三维旋涡星系有限厚盘上密度波的色散关系。在此色散关系的基础上讨论了盘的局域稳定性, 研究了旋涡星系旋臂的形态、三维盘状星系密度波的群速度。研究表明厚度是星系盘研究中不容忽视的重要参量。另外在有限厚盘星系密度波色散关系的基础上还探讨了一种确定星系厚度的新方法。

**关键词** 银河系 — 晕 — 旋涡星系 — 星系动力学 — 密度波

**分类号** P157

## 1 引 言

旋涡星系(包括透镜星系)的星系盘相当薄, 其标高远小于标长。通常都把它当作二维平面来处理<sup>[1]</sup>。1963年, Toomre 利用 Bessel 变换的泛函性质, 就 Toomre 型旋转曲线在理论上导出了二维平面(向外无限延伸的)盘状星系密度分布的 Toomre 模型<sup>[2]</sup>。同一年, Mestel 独立地提出另一种研究二维平面(半径)有限星系密度分布的方法<sup>[3]</sup>, 这种方法基本上只适用于平直旋转曲线。1964年, Toomre 研究了平面星系盘的稳定性问题, 提出了关于二维平面星系盘著名的 Toomre 稳定性条件<sup>[4]</sup>。1964年林家翘和徐遐生在最初探讨星系旋涡结构的密度波理论时, 也把盘状星系当作二维平面星系或无限薄盘来处理<sup>[5]</sup>。

但是, 真实的星系盘(如旋涡星系)毕竟具有一定的厚度。星系盘的厚度对星系结构的影响究竟有多大? 用无限薄盘(即二维平面)模型来近似描述三维有限厚盘是否恰当? 值得认真考虑。20多年来我们对星系的厚度效应进行了较为系统的研究。近年来人们对这个重要问题也愈来愈关注。

2000-07-17 收到

国家自然科学基金资助课题 国家 973 项目资助课题

1956 年 Schmidt 在历史上首次利用半经验方法建立了银河系三维密度分布的数值模型<sup>[6]</sup>。1984 年, Bahcall 和 Soneira, 利用沿径向和沿竖直均为指数衰减的双指数模型去拟合观测资料的方法提出了银河系物质密度分布的半经验分析模型<sup>[7]</sup>。早在 1975 年, 日本天文学家 Miyamoto 和 Nagai 从理论上最早探讨三维盘状星系模型。他们通过两个半经验参量把二维平面星系的 Toomre 模型唯象地推广到三维情形。1978 年, 彭秋和等人在  $z$  向取指数盘的模型的基础下, 通过 Green 函数方法和利用 Bessel 变换, 将二维平面星系的 Toomre 模型完全解析 (不含任何半经验参量) 推广到具有有限厚盘的三维盘状星系中去<sup>[8]</sup>。他们的研究表明, 在银河系薄盘的实际标高 (即半厚度为 0.33kpc) 和质量相同的情况下, 有限厚盘的模型盘中心处投影面密度值比无限薄 (即二维平面) 盘模型的相应密度值低 8% 左右。银河系光学主体组成的薄盘的等值厚度同银河系的光学直径之比小于 0.02, 在星系世界中, 它是非常薄的。上述 8% 的差异表明, 星系盘的厚度效应值得重视。至少对于较厚的盘状星系, 厚度效应是不能忽略的。星系盘的厚度效应对星系旋臂结构、星系盘的稳定性以及在星系盘的引力势作用下恒星的动力学行为究竟有多大的影响, 是人们关注的重要问题。

1968 年徐遐生在他的博士论文中<sup>[9]</sup> 通过沿  $z$  方向以物质密度分布为权函数取平均的简单方法最先探讨星系厚度对密度波的影响。他的处理有两点不足, 即: 扰动密度产生的扰动引力势用的仍是他在无限薄盘模型下由 WKB 近似方法给出的解, 而不是有限厚盘模型下的三维引力 Poisson 方程解; 在沿  $z$  方向取平均必然会丢失一些有用的宝贵信息。1970 年 Vandervoort 曾经进一步探讨了在高度扁平 and 快速旋转条件下星系盘的厚度对星系密度波的影响<sup>[10]</sup>。其结果与徐遐生沿  $z$  向取平均方法所得结果比较接近。但是其采用模型的近似条件  $T_{\parallel} \gg T_{\perp}$  ( $T_{\parallel}$  和  $T_{\perp}$  分别表示在银道面上恒星绕星系中心旋转的周期和恒星沿  $z$  向运动的振荡周期), 即使对银河系的薄盘也是不适用的。因为对银河系而言, 在太阳附近,  $T_{\parallel} \approx 2.2 \times 10^8 \text{yr}$ , 而按照 Binney 和 Trueman 的计算<sup>[1]</sup>,  $T_{\perp} \approx (5 \sim 6) \times 10^7 \text{yr}$ ,  $T_{\perp}/T_{\parallel} \approx 0.23 \sim 0.27$ 。而用三维星系盘较为真实的模型计算,  $T_{\perp} \approx 1.1 \times 10^8 \text{yr}$  (对  $z$  向初始速度为 10km/s 的恒星而言),  $T_{\perp}/T_{\parallel} \approx 0.5$ , 并非远小于 1, 因此, 即使对银河系的薄盘来说, Vandervoort 模型也是不适用的。

对于星系盘沿  $z$  向物质密度的分布规律, 人们长期主要在指数盘 ( $e^{-|z|/h_z}$ ) (Parenaiko 规律) 和自引力等温盘 ( $\text{sech}^{-2}(z/z_0)$ )<sup>[11]</sup> 两种模型上争论。1988 年, van der Kruit 又提出一种折衷的分布模型 ( $\text{sech}^{-1}(z/z_0)$ )。虽然等温盘模型可以在等温假设下解析推导出来, 但是大量观测研究和分析都支持指数盘。例如, 在 80 年代以前, 光学观测已清楚地表明, 许多盘状星系都显现出在远离星系平面处,  $z$  向光度普遍都呈现指数行为<sup>[12,13]</sup>。对银河系而言, 1983 年 Gilmore 和 Reid<sup>[14]</sup> 基于恒星计数研究银河系内恒星的分布, 其结论是: 银河系恒星沿  $z$  向分布能较好地利用指数盘拟合, 指数盘明显优于等温盘。1991 年, 根据星系的近红外观测, Kent 等人研究的结论是: 星系在竖直方向上的亮度分布 (它很可能表征物质质量分布) 更接近于指数律分布, 而不是按等温盘近似推出的分布律。1997 年, Grijs、Peletier 和 van der Kruit 在近红外  $K'$  波带上对高度倾斜盘状星系的 (统计上) 一个完全样本 (包括 47 个星系) 进行了详细研究。他们的结论是<sup>[15]</sup>: “我们样本中全部星系的面亮度在竖直方向上的分布都是指数分布的, 这种分布具有内涵的性质,

它不仅同星系类型无关。而且沿主轴方向它随位置变化很小”。

上述这些研究表明采用星系盘  $z$  向指数分布模型是合理的, 它基本上符合星系的实际情形。在该模型基础上, 自 1978 年以来, 我们通过 Green 函数方法, 利用 Bessel-Fourier 变换对有限厚盘的三维旋涡星系进行了系统的研究<sup>[8,16~28]</sup>, 求出了三维引力 Poisson 方程的严格(用积分形式表达的)解。不仅求出了(未扰动)三维星系盘的自引力势及其产生的自引力<sup>[8,16]</sup>, 而且还寻求了由多种不同数学形式的螺旋型扰动密度表示的旋臂产生的自引力势。1981 年, van der Kruit 和 Searle 根据侧向星系表面亮度的测光研究, 在等温盘模型基础上, 提出一种从星系亮度观测确定侧向星系厚度的方法。1988 年, 我们提出了一种根据旋臂图样的观测来估计非侧向旋涡星系厚度的方法<sup>[17]</sup>。我们已经近似测定了五百多个星系的厚度<sup>[20~22]</sup>, 并且还对比旋涡星系的一些典型物理量同星系厚度之间的关系进行了统计研究<sup>[23,24]</sup>。

我们在获得引力 Poisson 方程严格解的基础上<sup>[8,16]</sup>, 近三年来又进一步对星系盘的厚度效应进行了详细的数值计算研究<sup>[25~30]</sup>, 建立了三维有限厚盘星系的密度波理论。如此深入探讨星系盘厚度的影响在星系结构研究方面是独树一帜的。

## 2 星系盘基盘的径向自引力和银晕质量的估算

当三维星系盘的质量密度在  $z$  方向为指数分布时, 它可表达为:

$$\rho(r, \theta, z) = \frac{\alpha}{2} \Sigma(r, \theta) e^{-\alpha|z|}, \quad (1)$$

在此,  $\alpha = 1/h_z$ , 称为厚度因子,  $h_z$  是星系盘的标高。  $\Sigma(r, \theta)$  为恒星在星系盘面上的投影面密度。若  $\Sigma(r, \theta)$  在星系盘上为轴对称分布时, 利用 Bessel 变换, 可给出星系盘径向和  $z$  向自引力。当  $\alpha \rightarrow \infty$  时, 上述的表达式将回归到无限薄盘情形。通常天文观测只能推算出星系盘上的物质投影面密度, 利用上述表达式便可以讨论星系盘的自引力。观测表明, 旋涡星系(包括银河系)的投影面密度分布一般都遵从指数分布模型, 即  $\Sigma^{(0)}(r) = \Sigma_0 e^{-r/h_d}$ 。对银河系, 取太阳到银心的距离  $R_\odot = 8.5 \text{ kpc}$ (IAU 的标准值), 在太阳附近银河系物质在银道面上的投影面密度取为<sup>[18]</sup>  $\Sigma^{(0)}(R_\odot) = 54 M_\odot \text{ pc}^{-2}$ , 面密度分布的径向标长取为<sup>[32,33]</sup>  $h_d = 2.5 \text{ kpc}$ 。由此, 通过具体的数值计算, 就可以研究星系盘的自引力。

图 1 描述了在距离盘的中央平面 ( $z = 0$ ) 不同高度的平行层上星系盘径向自引力随半径  $r$  的变化。可见星系盘的径向自引力的极大值大约在  $r \approx 2.2h_d$  附近, 它的位置几乎同盘的厚度无关。由图还可见, 在星系盘的内区 ( $r < 10 \text{ kpc}$ ), 有限厚盘的径向引力明显低于无限薄盘模型值, 且盘愈厚, 径向引力愈弱, 而在星系盘外区 ( $r > 10 \text{ kpc}$ ), 或是当  $z \gg h_z/2$ , 银河系薄盘同无限薄盘间的差异就可以忽略了。

另外由星系内部各个成分的自引力以及观测到的旋转曲线可以对星系晕质量进行估计。众所周知, 宇宙物质总质量的绝大部分是以暗物质形式存在的, 而星系晕的主体是

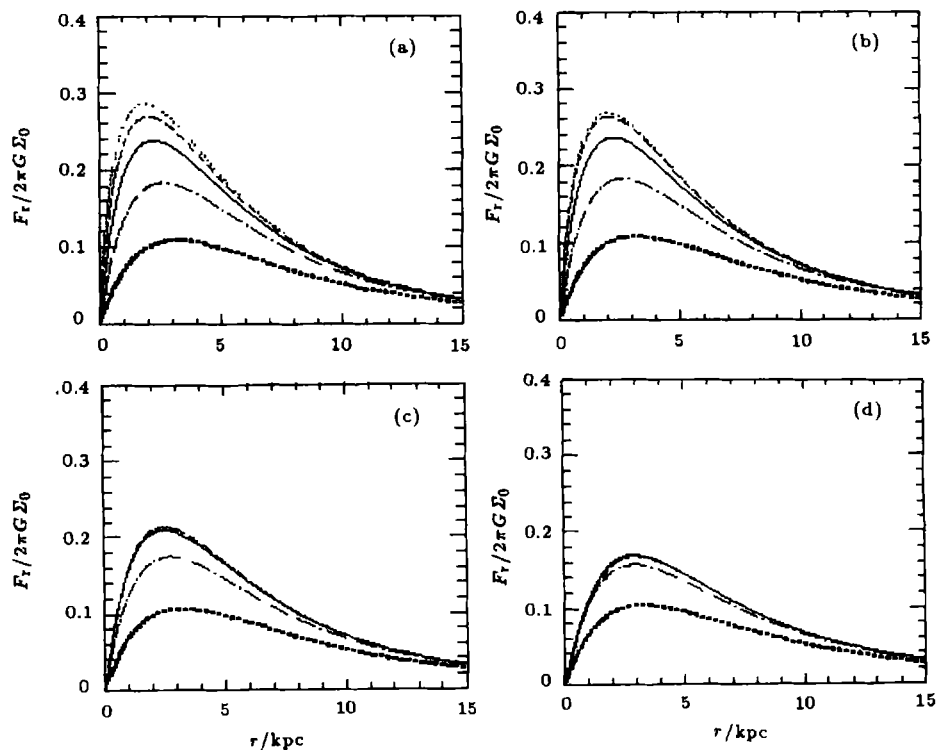


图 1 不同厚度的盘在不同高度上的径向引力

$\alpha = \infty$  (细点线);  $\alpha = 10.0$  (虚线);  $\alpha = 3.0$  (实线);  $\alpha = 1.0$  (点划线);  $\alpha = 0.3$  (粗点线);

(a)  $z = 0$ , (b)  $z = 0.1$  kpc, (c)  $z = 0.5$  kpc, (d)  $z = 1.0$  kpc .

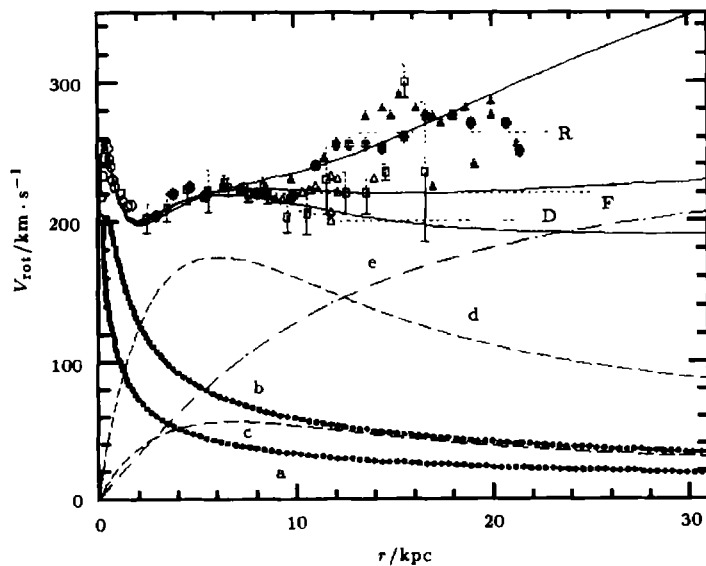


图 2 观测旋转曲线和三种外部旋转曲线 (R,F,D) 下的拟合旋转曲线 (实线)<sup>[26]</sup>

对外部平直旋转曲线情形的五成分各自对应的旋转曲线: a 核核球; b 核球; c 厚盘; d 薄盘; e 晕。

暗物质, 研究星系晕的质量大小很有意义。国际上迄今主要是利用拟合星系旋转曲线的数值方法来确定晕的大小以及结构。对银河系, 在银心到太阳之间区域 ( $R \leq R_{\odot}$ ), 各个不同研究小组观测到的旋转曲线基本上是一致的, 而在银河系的外区 ( $R > R_{\odot}$ ), 不同小组观测得到的旋转曲线相差很大。但由于绝大多数河外旋涡星系的旋转曲线都是平直的, 所以通常人们相信银河系的旋转曲线也可能平直地向外延伸。我们采用五种成分模型 (中心核球, 核球, 薄盘, 厚盘和银晕) 来拟合银河系的观测旋转曲线 (参看图 2)<sup>[26]</sup>。

通过数值拟合的计算研究, 我们发现: (1) 对银河系外区旋转曲线的不同走向情形, 银晕的质量差别很大。对旋转曲线呈下降、平直或上升的三种不同趋势, 在半径为 50 kpc 范围内银晕的质量分别约为  $22 \times 10^{11}$ ,  $6.6 \times 10^{11}$  和  $3.9 \times 10^{11} M_{\odot}$ ; (2) 在银盘选取不同厚度的模型下 (作为示例, 我们只选择平直旋转曲线情形), 为了拟合观测的旋转曲线, 银晕的质量也相差很大 (参看图 3)。例如, 同无限薄盘模型相比较, 银河系真实情形 (银盘的半厚度或标高约为 325 kpc) 在半径为 50 kpc 范围内银晕的质量只有前一模型下银晕质量的一半 (它们分别为  $22.3 \times 10^{11} M_{\odot}$  和  $11.2 \times 10^{11} M_{\odot}$ ); 此外对不同的晕的

密度分布模型, 银晕在 50 kpc 内质量有所差别。对晕密度下降更剧烈的模型, 为符合观测旋转曲线, 50 kpc 内的晕质量更小, 厚度效应更显著。这个计算结果可以理解如下: 在银河系的很内区 ( $R < 3\text{kpc}$ ), 物质绕银心的旋转曲线基本上是由核球 (包括中心核球) 和银盘的贡献, 银晕可以不考虑。根据前面对径向引力的计算发现, 愈厚的银盘在内区产生的径向引力愈弱, 它对旋转曲线的贡献明显低于无限薄盘模型。因此从很内区旋转曲线的拟合中, 必然要求核球的贡献增大, 因而核球物质密度向外降低的标长增大 (至少在  $R \leq 8\text{kpc}$  内都需要核球对旋转曲线的贡献增大来弥补较厚盘引力的减弱)。而在  $3\text{kpc} < R \leq 8\text{kpc}$  区域 (随着  $R$  的增加, 有限厚盘同无限薄盘的差异逐渐减少), 核球、银盘和银晕三者对旋转曲线的贡献都起作用。但是, 由于从很内区旋转曲线的拟合获得核球的较大贡献延伸到在这个区域内的一个重要影响必然是降低了银晕对旋转曲线的贡献 (这是由于银晕的贡献只是观测旋转曲线数值扣除核球和银盘二者贡献之和后的残差)。也就是说, 在这个区域内所需求的银晕质量将下降 (它表现为其标长明显减小)。因而厚度较厚的银盘模型对应的银晕质量将明显减少。这结果表明, 在研究银河系结构和推算银晕 (以暗物质为主) 的质量时, 星系盘的厚度效应是相当重要的。

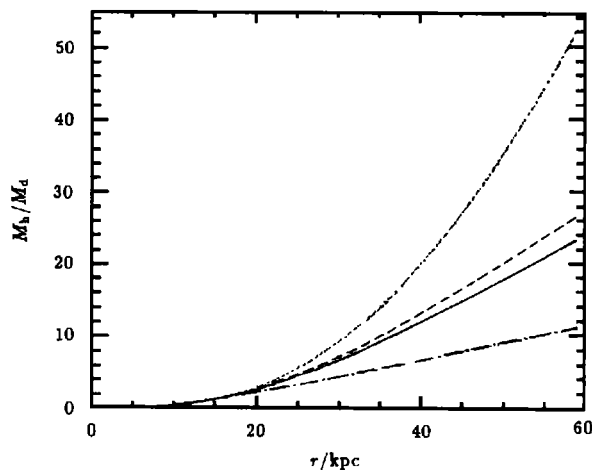


图 3 对不同厚度盘的径向晕质量和薄盘总质量比  
无限薄盘 (点线);  $h_z = 250$  pc (虚线);  $h_z = 325$  pc (实线);  
 $h_z = 1000$  pc (点划线)

### 3 星系盘的 $z$ 向自引力和动力学

在对距星系盘中央平面 ( $z = 0$ ) 不同高度处的平行平面上的  $z$  向自引力研究 (见图 4) 表明: 在  $z = 0$  的对称平面上,  $F_z(r) = 0$ 。随着  $z/h_z$  的增大, 有限厚盘同无限薄盘自引力之间的差别逐渐变小, 在  $z \gg h_z$  ( $r > 10$  kpc) 时, 有限厚盘同无限薄盘的差别基本消失, 即此时无限薄盘模型是很好的近似。但是, 在星系盘的内区, 即在  $|z| \leq h_z$  ( $r < 10$  kpc) 时, 有限厚盘同无限薄盘的自引力差别相当显著。例如, 对银河系的薄盘, 在  $r < 8$  kpc 区域内  $z = 0.1$  kpc 附近, 这种自引力可相差 4 倍以上。因此人们在研究竖直方向运动或动力学问题时, 采用无限薄盘的近似结果极有可能是错误的。

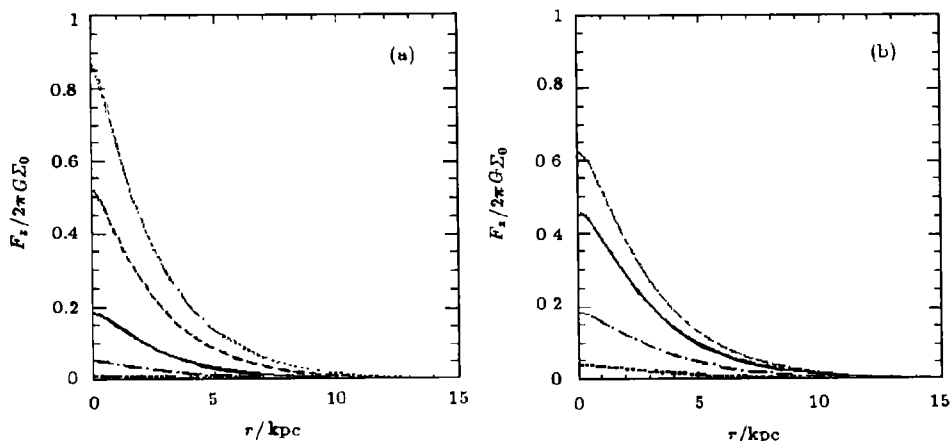


图 4 不同厚度盘在不同高度上的  $z$  向引力: (a)  $z = 0.1$  kpc, (b)  $z = 0.5$  kpc  
 $\alpha = \infty$  (细点线);  $\alpha = 10.0$  (虚线);  $\alpha = 3.0$  (实线);  $\alpha = 1.0$  (点划线);  $\alpha = 0.3$  (粗点线)

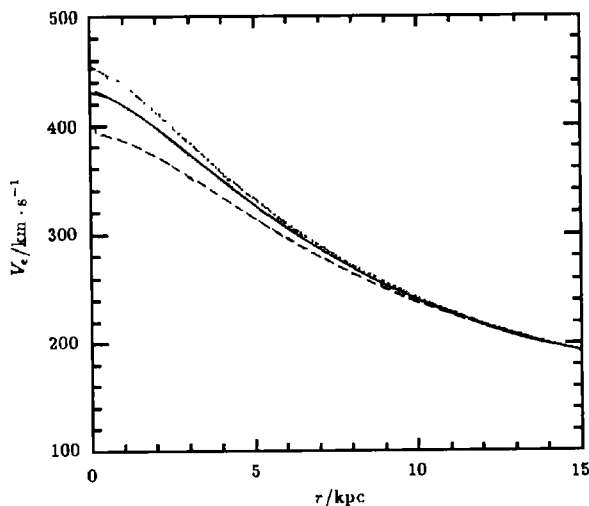


图 5 在不同厚度盘 ( $\alpha = \infty, 3, 0.3$ ) 的盘平面上的逃逸速度

在星系盘的自引力场中, 一个试验恒星的竖直方向运动规律可以用  $z$  向引力表达式来描述。在此, 我们暂时不考虑星际气体对试验恒星的阻力, 于是极易由引力势给出在  $(r, z)$  处试验恒星沿  $z$  方向的逃逸速度。针对几种不同厚度的星系盘, 我们研究了在  $z = 0$  平面上的逃逸速度随  $r$  的分布 (图 5), 发现不同厚度星系盘模型的竖直方向的逃逸速度相差并不是太大, 仅在星系中心附近, 同无限薄盘相比, 银河系实际的薄盘情形 ( $h_z = 325$  pc) 的逃逸速度只是降低了 10% 左右。随着  $r$  的增大, 不同厚度模型的竖直方向逃逸速度差别将明显减小。

对逃逸速度而言, 不同厚度星系盘模型的结果差别不太显著, 但对另外一些动力学

量, 结果差别比较大。如自引力场中试验恒星沿  $z$  向的振荡周期 (见图 6)。先选定初始竖直速度  $v_{z,0} = 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , 对几种不同厚度的星系盘模型研究了振荡周期  $T$  随  $r$  的变化关系。研究发现: 竖直方向的振荡周期随着恒星离银心的距离  $r$  增大而明显变长; 竖直方向的振荡周期同星系盘模型的厚度明显相关, 愈厚的星系盘, 其竖直方向振荡周期愈长。如在太阳附近, 对  $\alpha = 3.0$ 、 $\alpha = 10.0$  和  $\alpha \rightarrow \infty$  三种不同模型来说,  $T_z$  分别为  $1.1 \times 10^8$ 、 $7.7 \times 10^7$ 、 $2.5 \times 10^7 \text{ yr}$ , 即银河系薄盘的竖直振荡周期等于无限薄盘模型值的 4 倍左右, 也要比通常人们估计的值  $6.0 \times 10^7 \text{ yr}$ <sup>[1]</sup> 长 2 倍。在物理上, 这种相关反映了星系盘愈厚自引力愈弱的事实。此外, 我们还研究了在  $z = 0$  平面上恒星  $z$  向振荡周期同初始速度间的关系。计算显示在银河系实际的薄盘情形下, 上抛速度  $v_{z,0} = 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  时,  $T_z = 1.6 \times 10^8 \text{ yr}$ , 而对以  $v_{z,0} = 50 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  运动的恒星来说,  $T_z = 2.5 \times 10^8 \text{ yr}$ , 这结果也是非常合理的。这种方法对于我们更进一步研究盘晕物质交流将有所帮助。

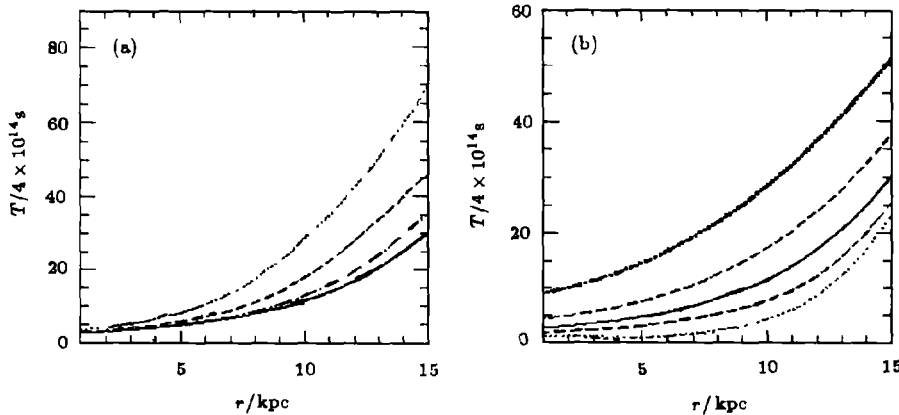


图 6 (a) 具有不同初始速度 ( $v_{z,0} = 10$ 、 $20$ 、 $50$ 、 $100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ) 的试验恒星在  $\alpha = 3.0$  星系盘下的四分之一振荡周期; (b) 具有同一速度 ( $v_{z,0} = 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ) 的试验恒星在不同厚度盘下的四分之一振荡周期

$\alpha = \infty$ (细点线),  $\alpha = 10.0$ (虚线),  $\alpha = 3.0$ (实线),  $\alpha = 1.0$ (点划线),  $\alpha = 0.3$ (粗点线)

此外, 我们还讨论了沿  $z$  向以低于逃逸速度运动的试验粒子所能达到的最高点处的位置 (见图 7), 它不仅同在  $z = 0$  平面上的初始速度有关, 而且也同星系盘模型的厚度参数有关。研究发现: (1) 如果试验恒星的竖直初始速度不太大 (例如,  $v_{z,0} < 100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ), 则在星系较内区域 ( $r < 5 \text{ kpc}$ ) 中, 该恒星能够达到的最大高度  $z_{\text{max}}$  一般都不到  $1 \text{ kpc}$ 。但随着  $r$  的增加, 它们所能达到的  $z_{\text{max}}$  就迅速增长。例如, 在  $r = 10 \text{ kpc}$  处,  $v_{z,0} = 100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  的恒星  $z_{\text{max}}$  可达  $4 \text{ kpc}$  的位置上。(2)  $z_{\text{max}}$  同恒星的初始速度密切相关, 随着  $v_{z,0}$  的增大,  $z_{\text{max}}$  迅速增大。例如在  $r = 10 \text{ kpc}$  处,  $v_{z,0} = 100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  的恒星最大高度可达  $4 \text{ kpc}$ , 而当  $v_{z,0} = 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  时  $z_{\text{max}}$  仅约为  $0.2 \text{ kpc}$ 。(3) 恒星所能达到的最大高度同星系盘模型的厚度密切相关, 因无限薄盘模型的  $z$  向自引力最大, 所以该模型中的  $z_{\text{max}}$  远低于其他厚度模型。星系盘厚度愈厚,  $z_{\text{max}}$  愈大。以  $r = 10 \text{ kpc}$  处为例, 在无限薄盘模型下,  $v_{z,0} = 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  的恒星所能达到的  $z_{\text{max}}$  仅约  $50 \text{ pc}$  左右, 而同样的恒星在银河系薄盘真实厚度模型下的  $z_{\text{max}}$  则可达到  $200 \text{ pc}$ 。

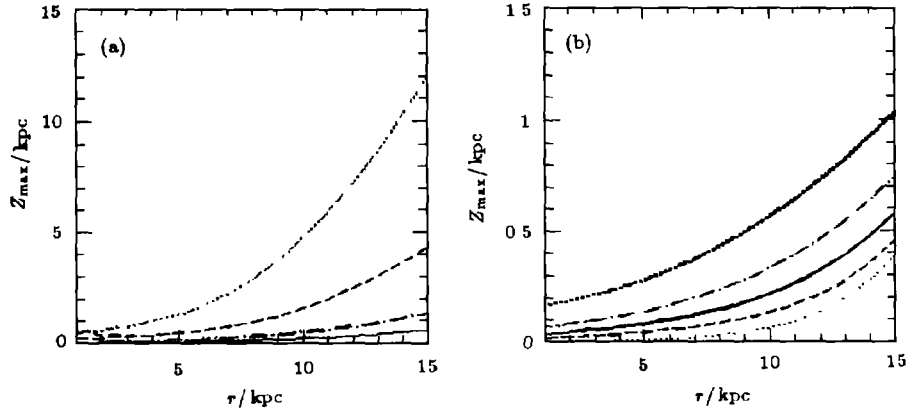


图 7 (a) 具有不同初始速度 ( $v_{z,0} = 10、20、50、100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ) 的试验恒星在  $\alpha = 3.0$  星系盘下所能到达的最大高度; (b) 具有同一速度 ( $v_{z,0} = 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ) 的试验恒星在不同厚度盘下所能到达的最大高度

$\alpha = \infty$  (细点线);  $\alpha = 10.0$  (虚线);  $\alpha = 3.0$  (实线);  $\alpha = 1.0$  (点划线);  $\alpha = 0.3$  (粗点线)

#### 4 星系旋臂的自引力

观测分析表明, 对大多数双旋臂的旋涡星系, 其旋臂均可以较好地用对数螺旋线来拟合 [17,34,35]。按 Lindblad 的观点 [36], 星系的旋臂及其旋涡图样实际上是迭加在星系基盘 (未扰动盘) 之上的一种 (以恒星为主要成分) 物质密度的波动, 即密度波。因此, 对数螺旋线型密度扰动的旋臂在数学上可以近似表述为  $\sigma_1(r, \theta, t) = \frac{A}{r} e^{i\Lambda \ln(r)} e^{i(\omega t - m\theta)}$ , 其中  $m$  为旋臂的数目,  $A$  代表与密度扰动大小有关的某一常数,  $\Lambda = m \cot(\mu)$  表示对数螺旋线的紧卷程度,  $\mu$  为旋臂的切向角。林家翘、徐遐生等人建立的星系密度波理论 [5,37] 基本上是在二维平面星系盘上的旋臂产生的自引力势解的基础上的。也就是说, 其星系旋臂自引力势 (Poisson 方程的解) 是对于无限薄盘情形并利用 WKB 方法寻求短波近似解求出的。对于三维有限厚星系盘情形, 彭秋和等人早在 1979 年就给出了对数螺旋线型旋臂产生的自引力势的严格解 [16]。在星系对称平面 ( $z = 0$ ) 上, 对应的扰动引力势的解为

$$V_1(r, \theta, 0, t) = -2\pi G A e^{i[\omega t - m\theta + \Lambda \ln(r)]} \text{Re}\{g(\alpha r)\}, \quad (2)$$

其中

$$g(\alpha r) = e^{i\Lambda \ln 2} \frac{\Gamma\left(\frac{1+m+i\Lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+m-i\Lambda}{2}\right)} \int_0^\infty J_m(x) \frac{e^{i\Lambda \ln x}}{x\left(1 + \frac{x}{\alpha r}\right)} dx, \quad (3)$$

$\Gamma(x)$ 、 $J_m(x)$  分别为 Gamma 函数、Bessel 函数。对无限薄盘, 解可简化为 Kalnajs 的结果 [38]

$$V_1(r, \theta, t) = -2\pi G A e^{i[\omega t - m\theta + \Lambda \ln(r)]} \frac{1}{\sqrt{m^2 + \Lambda^2}}. \quad (4)$$



我们用数值解法对 (3) 式进行了计算。从图 8 中可以看出, 在相同的扰动密度作用下, 在观测到的旋涡图样最主要的区域, 有限厚盘的径向扰动引力势将远小于无限薄盘的引力势, 且盘越厚, 扰动势越小。当非常远离盘心区域时, 扰动势将逼近无限薄盘的值。图 9 描述了星系盘上  $g(\alpha r)$  的相位与半径  $r$  的关系, 可见对于紧卷的密度扰动, 扰动密度与扰动势之间都非常好地满足反相位, 这与最初 Lindblad<sup>[36]</sup> 提出密度波的想法完全一致。

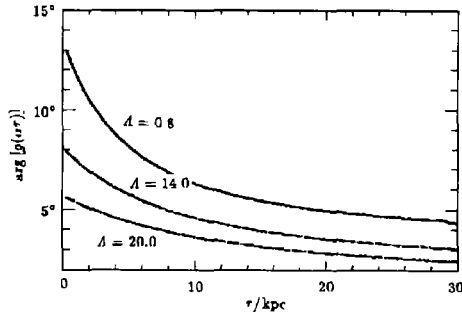


图 9 不同厚度的盘,  $z = 0$  盘面上扰动引力势相位与半径的关系<sup>[30]</sup>

取  $m = 2$ ,  $\alpha = 3.0$

星和气体) 混合盘的密度波的色散关系<sup>[30]</sup>

$$1 - \nu^2 = \frac{k_s r}{\mu^2} \left\{ F_\nu(x) + q F_\nu^{(g)}(x_g) \right\} \left\{ \text{Re} \{ g(\alpha_s r) \} + q \text{Re} \{ g(\alpha_g r) \} \right\}, \quad (5)$$

其中,  $\nu = \frac{m}{\kappa(r)} [\Omega_P - \Omega(r)]$  是无量纲的密度波的频率,  $\kappa(r)$  是本轮振荡频率,  $\Omega_P$  为图样的旋转角速度,  $k = \Lambda/r$  为密度波的径向波数,  $\alpha_s$ 、 $\alpha_g$  分别为恒星盘与气体盘标高的倒数。  $q = \frac{\sigma_0^{(g)}}{\sigma_0^{(s)}}$  为气体盘的投影面密度与恒星盘的投影面密度的比值。在 (5) 式中  $F_\nu(x)$ 、 $F_\nu^{(g)}(x_g)$  分别为纯恒星盘和纯气体盘的减缩因子。  $k_s = \frac{\kappa^2(r)}{2\pi G \sigma_0^{(s)}}$ 。

由于严格求解了对数螺旋型密度扰动的引力 Poisson 方程, 并考虑了恒星与气体两种成分, 因此我们所给的色散关系在对称盘面上比 Vandervoort 和徐遐生所给的色散关系更严格, 适用范围更广。与二维纯恒星盘的色散关系进行比较, 不难给出此时纯恒星盘的

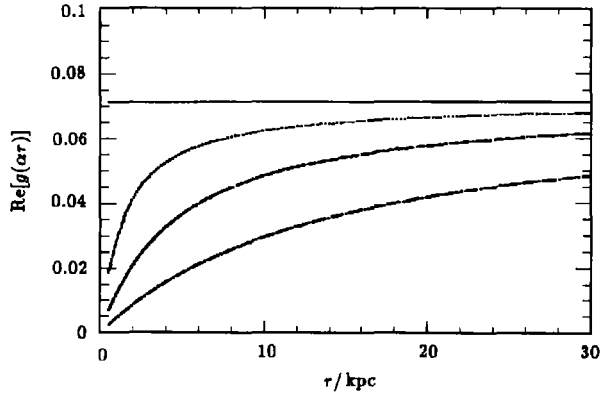


图 8 不同厚度的盘,  $z = 0$  盘面上扰动引力势振幅与半径的关系<sup>[25]</sup>

取  $m = 2$ ,  $\Lambda = 14.0$ , 由上往下实线、点线、划线、点划线分别对应于  $\alpha = \infty$ 、10.0、3.0、1.0 的情况

## 5 三维混合盘的色散关系和星系厚度引起的减缩因子

与林家翘、徐遐生推导无限薄盘上密度波色散关系的方法相似, 对于自维持密度波, 认为扰动密度须等于由扰动引力势所引起的响应密度, 扰动引力势须等于由扰动密度所引起的响应引力势。由此密度扰动 (即旋臂) 产生的自引力势采用的三维有限厚星系盘情形的 (3) 式, 可推导出有限厚星系 (恒

厚度减缩因子:

$$F_{\nu}^{(\text{thickness})}(y_*, \alpha_s, r) = \sqrt{\frac{y_*}{2}} \alpha_s r \text{Re} \left\{ g(\alpha_s r, \sqrt{\frac{y_*}{2}} \alpha_s r) \right\}, \quad (6)$$

$y_* = \frac{2k^2}{\alpha_s^2}$ , 与徐遐生 [9] 以及 Vandervoort [10] 所给的定义完全一样。但注意徐遐生以及 Vandervoort 的厚度减缩因子  $J(y_*)$ 、 $Q_0^{-1}(\kappa)$  仅是单变量  $y_*$  的函数, 而 (6) 式所给的厚度减缩因子不仅与  $y_*$  有关, 且与盘的厚度和盘上的具体位置有关。如图 10 所示: 距盘心越近, 厚度对  $F_{\nu}^{(\text{thickness})}$  的影响愈明显, 厚度减缩因子愈小; 盘愈厚, 在相同位置处, 厚度减缩因子越小, 即与无限薄盘的厚度减缩因子 (= 1) 差别越明显。由此可见完全有必要来重新讨论三维密度波的性质, 并可想象由此色散关系出发讨论密度波的性质定会带来与以前不同的结果。我们也讨论了星系盘的局域稳定性 [25]、旋臂形状 [29]、群速度等一系列问题 [28,30]。

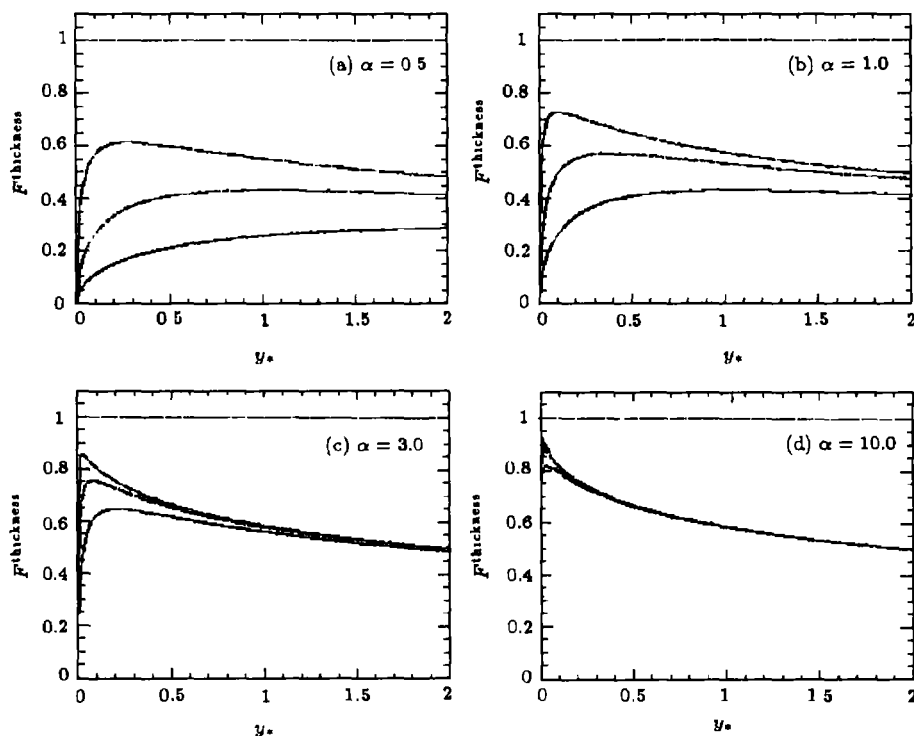


图 10 厚度减缩因子与  $y_*$  的关系 [30]

$a \sim d$  分别对应不同厚度盘的情况, 图中点线对应无限薄盘, 而实线、划线、点划线分别对应于距盘心半径  $r$  为 4kpc、8kpc、20kpc 处的情况

## 6 星系盘的局域稳定性

对色散关系的一个主要的应用是判断盘对某种扰动是否满足局域稳定性。仅当盘上

处处有  $\omega^2 > 0$ , 即  $\nu^2 > 0$  时,  $\omega$  为实数, 由色散关系才可给出行波解, 此刻星系盘才能满足局域稳定性条件。与 Toomre 所采用的方法类似, 我们可将稳定性问题化为求极值的问题。于是我们将 Toomre 稳定性判据由二维轴对称扰动情况推广到更实际的三维星系盘: 局域稳定性参数

$$Q = \sqrt{\langle c_r^2 \rangle} / \sqrt{\langle c_r^2 \rangle_{\min}},$$

当且仅当  $Q > 1$ , 满足局域稳定性条件, 密度波才能够自维持。其中  $\sqrt{\langle c_r^2 \rangle_{\min}}$  为由色散关系得到的极小径向弥散速度:

$$\sqrt{\langle c_r^2 \rangle_{\min}} = \frac{\eta(r, \alpha, m, q) G \sigma_0(r)}{\kappa(r)} \quad (7)$$

然而对于二维星系盘, 可以得到我们非常熟悉的结果:

$$\eta(r, \alpha, m, q) = \begin{cases} 3.36 & \text{纯恒星盘} \\ \pi & \text{纯气体盘} \end{cases} \quad (8)$$

为常数。而真实的星系盘中  $\eta$  不仅是位置  $r$  的函数, 而且也是旋臂数目  $m$ 、气体含量的含量  $q$  以及星系盘厚度参量  $\alpha$  的函数。可见使得对盘的局域稳定性讨论内容大大丰富了。由图 11(a) 可见, 对于二维纯恒星盘, 旋臂数目越多, 盘越稳定。且越向外  $\eta(r)$  值将趋于 Toomre 纯恒星盘的结果。由图 11(b) 可见, 对于两条旋臂的二维盘, 增加气体含量将不利于盘的稳定性。图 11(c) 描述了星系盘的有效厚度对盘的稳定性的贡献, 盘越厚越稳定, 即相对于同种密度扰动, 盘越厚越稳定, 密度波也越难激发。这也许可解释椭圆星系和 S0 星系的旋臂为何不存在。另外, 我们发现当  $\alpha < 10$  时, 在盘心区域  $Q$  值将大于 2.5, 按照 Athanssoula<sup>[39]</sup> 的观点, 盘将非常稳定, 足以克服类棒结构所带来的不稳定性。最近, 我们<sup>[25]</sup> 计算了太阳附近的局域稳定性参数  $Q$ , 它的值应为 2.08, 而非 Toomre 纯恒星盘的结果 1.37。

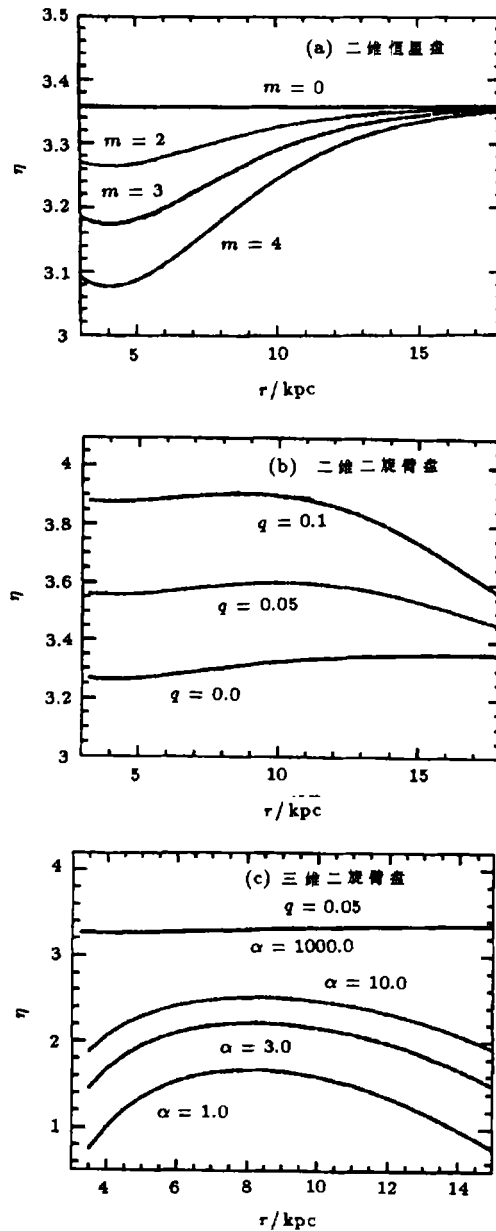


图 11  $\eta$  与半径的关系<sup>[30]</sup>

## 7 旋涡星系的形态

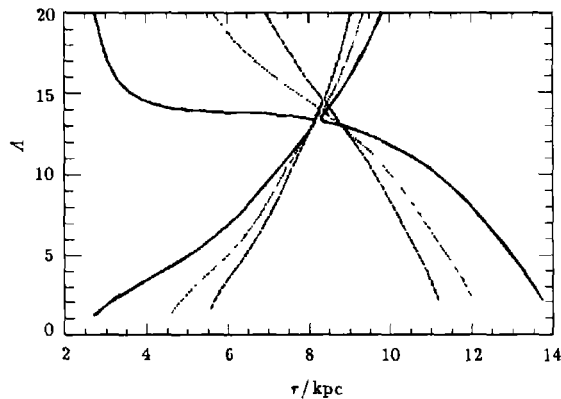


图 12 不同旋臂数目的密度波旋臂的切向角沿无量纲频率  $\nu$  的分布<sup>[29]</sup>

实线、点线和划线分别对应于  $m = 2, 3, 4$  的情况。在此我们已取了银河系的参数

得到  $A$  与  $r$  的关系。图 12、图 13 分别描述了  $z = 0$  盘面上的旋臂的紧卷参量 (它反映旋臂切向角) 随无量纲频率 (反映银心距) 的关系。由图 12 可见, 仅对双旋臂的旋涡星系的旋臂可以比较自洽地用对数螺线型密度扰动来描述。这与绝大多数双旋臂旋涡星系的旋臂基本上都可以用对数螺线很好地拟合的观测事实相一致。而国际上对这个观测事实至今尚未从理论上给出解释。我们数值计算的结果不仅使得我们的理论成为较为自洽的理论, 并且在国际上也是首次从理论上给出此性质。用到银河系的参量, 我们发现短波旋臂的形态在很大的范围内为常数:  $A = 14.0 \pm 0.5$ , 对应的旋臂切向角为  $-9.0^\circ \pm 0.9^\circ$ , 与韩金林、乔国俊<sup>[40]</sup> 用星系磁场方法定出的旋臂切向角  $-8.2^\circ \pm 0.5^\circ$ , 以及 Mishurov 等人<sup>[41]</sup> 用太阳附近的造父变星的视向场运动速度所定出的旋臂切向角  $-6.8^\circ \pm 0.7^\circ$  都比较接近。

另外, 由图 13 可见当银河系太阳附近的气体成分的含量为恒星成分质量的 20% ~ 30% 时, 密度波很难再用对数螺线来描述。由图 13 还可见: 气体含量越多,  $A$  值将越小, 即旋臂越松卷。这与在对星系分类时统计出来的结果 (即从 Sa → Sd 和 Sba → SBd, 核球相对于盘越来越小, 气体含量逐渐增加, 旋臂缠绕越来越松) 是一致的。

## 8 密度波的群速度

对色散关系的一个主要的应用便是用它可以确定旋臂的形态。用自维持的密度波理论推导色散关系的过程中假定了扰动密度与响应密度、扰动引力势与响应引力势相等。如果我们要来评判这个三维密度波理论是否自洽, 则要看通过求解色散关系方程得到的波数是否能回到最初对数螺线密度扰动的假设 (即我们选取的试探波函数)。对数螺线型密度扰动的紧卷参量  $A = m \cot(\mu)$ , 切向角  $\mu$  在整个旋臂上应该恒定, 即紧卷参量  $A$  应为常数。而紧卷参量与密度波的波数间满足关系  $A = kr$ , 于是我们极易从色散关系式

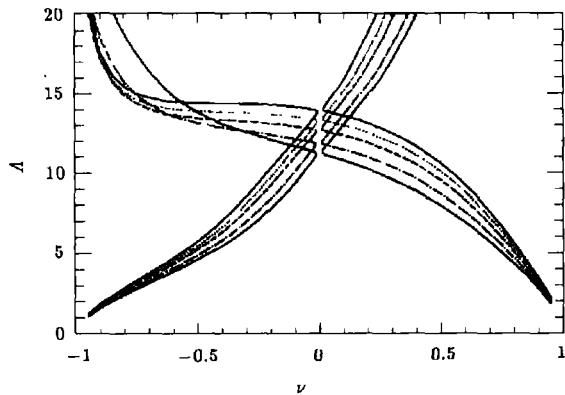


图 13 具有不同的气体含量, 两条旋臂的密度波的旋臂切向角沿无量纲频率  $\nu$  的分布<sup>[30]</sup>

由上往下分别对应于  $q = 0.0, 0.05, 0.10, 0.20$

密度波的群速度太大一直是困扰林-徐密度波理论的问题之一。1969年, Toomre 指出: 在林-徐无限薄盘模型中, 银河系密度波的群速度  $v_g \approx 10\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ , 密度波的能量将在  $1 \times 10^9\text{yr}$  (即太阳绕银心运转大约 4 个周期) 以内传出星系, 如果没有某种密度波的激发和能量自维持机制, 星系旋涡图样将很快消失, 这同我们观测到许多星系明显有旋涡图样的事实不符。由色散关系 (5) 式, 我们严格计算了  $z=0$  盘面上的密度波的分布。对银河系, 无论是三维或是两维模型, 无论是密度波短波解或是长波解, 密度波的群速度并非 Toomre 所估计的那样在整个盘上近似为  $10\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$  的量级, 而是趋于内外 Lindblad 共振圈时, 群速度趋于零, 趋于共转圈时, 群速度趋于无穷 (见图 14)。我们研究发现密度波长波的传播速度远大于短波的传播速度, 这便是人们在讨论密度波的性质时仅考虑短波解的原因之一。对于无限薄盘模型, 密度波由共转圈向内传到  $\nu = -0.95$  时, 需要  $1.86 \times 10^9\text{yr}$ , 密度波由共转圈向外传到  $\nu = 0.95$  时, 需要  $7.58 \times 10^9\text{yr}$ 。可见密度波由共转圈向内传播需要的时间与 Toomre 的估计值差别并不太大。而对于有限薄盘模型, 密度波由共转圈向内传到  $\nu = -0.95$  时, 需要  $4.17 \times 10^9\text{yr}$ , 密度波由共转圈向外传到  $\nu = 0.95$  时, 需要  $6.54 \times 10^9\text{yr}$ 。所以考虑到厚度效应后使得密度波由共转圈向内传播的动力学时标提高了 3 倍多, 尽管仍只有宇宙年龄的  $1/3$  左右, 但明显使密度波理论中度问题得到缓和。

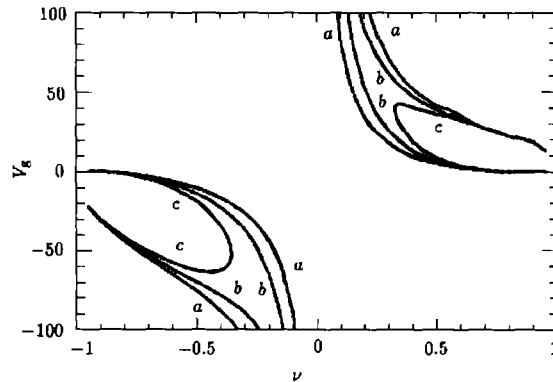


图 14 两条旋臂的三维旋涡星系  $z=0$  盘面上的群速  
群速度分布<sup>[30]</sup>

a、b、c 分别对应于  $Q=0.9$ 、 $1.0$ 、 $1.1$  的情况, 而实线和  
划线分别对应于密度波的长波解和短波解

## 9 结 论

对星系盘基盘的研究可得以下结论: 在研究银河系和推算银晕的质量时, 星系盘的厚度是一个非常重要的参量; 对星系盘的自引力研究表明用无限薄盘的近似来研究真实的星系盘中沿  $z$  方向的恒星运动或动力学问题是很不合适的。

对三维旋涡星系  $z=0$  盘面上的密度波的研究我们可得如下几点结论: 厚度是密度波理论研究中不容忽略的重要参量, 三维有限厚盘模型与二维无限薄盘模型有完全不同的性质; 星系盘研究中的 Toomre 稳定性判据应该推广到更真实的三维星系盘模型; 仅双旋臂的旋涡星系可以比较自治地用对数螺旋型密度扰动来描述; 引入厚度效应可以在一定程度上缓解密度波理论研究中的群速度太大的问题。

总之, 研究表明厚度是星系动力学研究中一个非常重要的参数, 会影响到许多我们关心的问题, 如星系的形成, 化学演化等。工作还有待进一步深入展开。

## 参 考 文 献

- 1 Binney J, Tremaine S. Galactic Dynamics, Princeton: Princeton University Press, 1987
- 2 Toomre A. *Ap. J.*, 1963, 138: 385
- 3 Mestel L. *M.N.R.A.S.*, 1963, 126: 553
- 4 Toomre A. *Ap. J.*, 1964, 139: 1217
- 5 Lin C C, Shu F H. *Ap. J.*, 1964, 140: 646
- 6 Schmidt M. *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 1956, 13: 15
- 7 Bahcall H N, Soneira R M. *Ap. J. Suppl. Ser.*, 1984, 55: 67
- 8 彭秋和, 黄克谅, 黄介浩等. *天文学报*, 1978, 19: 182
- 9 Shu F H. Ph.D. Thesis, Cambridge, Massachusetts: Harvard University, 1968
- 10 Vandervoort P O. *Ap. J.* 1970, 161: 87
- 11 Spitzer L. *Ap. J.*, 1942, 95: 329
- 12 Tsikoudi V. *Ap. J.*, 1979, 234: 842
- 13 van der Kruit P C, Searle L. *Astron. Astrophys.*, 1981, 95: 105
- 14 Gilmore G, Reid N. *M.N.R.A.S.*, 1983, 202: 1025
- 15 de Grijs R, Pellerier R F, van der Kruit P C. *Astron. Astrophys.*, 1997, 327: 966
- 16 彭秋和, 李晓卿, 苏洪钧等. *中国科学*, 1979, No.3: 274
- 17 Peng Qiu-He. *Astron. Astrophys.*, 1988, 206: 8
- 18 彭秋和. *天文学报*, 1992, 33: 362
- 19 彭秋和. *天文学报*, 1993, 34: 130
- 20 Ma Jun, Peng Qiu-He, Gu Qiu-Sheng. *Ap. J.*, 1997, 490: L57
- 21 Ma Jun, Peng Qiu-he, Cheng Rui et al. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 1997, 126: 503
- 22 Ma Jun, Peng Qiu-He, Gu Qiu-Sheng. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 1998, 130: 449
- 23 Ma Jun, Zhao Jun-Liang, Shu Cheng-Gang et al. *Astron. Astrophys.*, 1999, 350: 31
- 24 马骏, 赵君亮, 张飞鹏等. *天文学报*, 2000, 41: 172
- 25 罗新炼, 彭秋和. *Chin. Phys. Lett.*, 1999, 16: 931
- 26 彭芳, 彭秋和. *Chin. Phys. Lett.*, 2000, 17: 385
- 27 李猛, 罗新炼, 彭秋和等. *Chin. Phys. Lett.* 2000, 17: 466
- 28 龙旻, 彭秋和, 罗新炼等. *Chin. Phys. Lett.* 2000, 17: 929
- 29 罗新炼, 彭秋和, 龙旻等. *Chin. Phys. Lett.* 2000, 17: 932
- 30 罗新炼, 龙旻, 彭秋和等. *天文学报*, 2000, 41: 424
- 31 Gould A. *M.N.R.A.S.*, 1990, 244: 25
- 32 Robin A C, Creze M, Ohan V. *Astron. Astrophys.*, 1992, 265: 32
- 33 Fux R, Martinet L. *Astron. Astrophys.*, 1994, 287: L21
- 34 Danver C G. *Ann. Lund. Obs.*, 1942, 10: 162
- 35 Kennicutt R C, Hodge P. *Ap. J.*, 1982, 253: 101
- 36 Lindblad P O. *Stockholm Obs. Ann.*, 1960, 21: 3
- 37 Lin C C, Yuan C, Shu F H. *Ap. J.*, 1969, 155: 721
- 38 Kalnajs A J. *Ap. J.*, 1971, 166: 275
- 39 Athanassoula E, Sellwood J A. *M.N.R.A.S.*, 1986, 221: 213
- 40 Han J L, Qao G J. *Astron. Astrophys.*, 1994, 288: 759
- 41 Mishurov Yu N et al. *Astron. Astrophys.*, 1997, 476: 73
- 42 Toomre A. *Ap. J.*, 1969, 158: 899

## The Thickness Effect of Galactic Disk

Peng Qiuhe Luo Xinlian Peng Fang Long Min  
(*Department of Astronomy, Nanjing University, Nanjing 210093*)

### Abstract

Based on the limited solution of three-dimensional (3D) Poisson equation, the dynamical properties of finite-thickness galactic disk is studied first. Calculation shows that the thickness effect cannot be neglected. It is found that the more realistic Galaxy model needs only about half of the halo masses than that with an infinitesimal thin disk. For a steeply decreasing halo density model, the thickness effect is more obvious. In addition, the dynamical properties of disturbed disk are investigated. By using the solution of 3D Poisson equation with Lin-Shu self-maintained density wave theory, a dispersion relation of 3D-density wave is set up. The local stability of disk is discussed, and the Toomre's local stability criterion is extended to the more realistic galactic model. Then we study the form of spiral arm, and show that only two armed spiral galaxies can be self-consistent with the logarithmic density disturbance, which is consistent with the observation. The group velocity of density waves is discussed, and it is shown that the group velocity problem can be soften by introducing the effect of thickness to a certain extent. Anyhow, it is shown that the finite thickness effect is a very important parameter in density waves theory. At the same time we put forward a tentative method to determine the thickness of galaxies.

**Key words** Galaxy—halo—spiral galaxies—galactic dynamics—density wave theory