第 19 卷 第 4 期
2001 年 12 月

天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol.19, No.4
Dec., 2001

移动星团视差研究方法的改进

赵君亮 陈 力

(中国科学院上海天文台 上海 200030)

摘 要

移动星团视差的精确测定对于宇宙距离尺度以及许多天体物理关系的研究起重要的定标作用。因此，在大约一个世纪的时间内，确定移动星团视差的方法一直处于不断改进之中。对此作了简要介绍和评述。

关 键 词 星团: 移动星团 — 视差 — 方法: 观测

分 类 号 P154.13, P126.4

疏散星团在天文学上是研究恒星形成、结构和演化理论的理想实验室。就每一个疏散星团而言，通常认为它们的成员星是在不超过几百万年的时间内，由同一分子云形成的 [1] 。因此，如果不考虑内部速度弥散度 (其典型值为 1 km/s) ，则同一星团内的成员具有共同的空间运动，在天球上表现为自行运动方向互相平行。某些疏散星团离开地球比较近，由于透视的原因，其成员星的自行矢量会交于天球上的一点，称为会聚点 (或辐射点) 。移动星团是指能够测出会聚点位置的、较近的疏散星团。利用移动星团的运动特征可以确定星团的视差，这就是星团视差。

星团视差属于一类平均视差，是恒星视差绝对测定的一条重要途径，也是天文学上与三角视差定标无关的视差测定方法。随着恒星自行资料的累积，特别是自行精度的提高，星团视差可以达到很高的精度，甚至好于三角视差的精度。所以，移动星团 (其中首推毕星团) 视差的精确测定，对于宇宙距离尺度、许多天体物理关系 (如绝对星等 - 光谱型关系、质光关系等以及诸如分光视向速度定标一类问题)[2~5] 的研究具有十分重要的意义。正因为如此，从 20 世纪初至今，人们在累积有关观测资料并提高其精度的同时，对确定星团视差的合理方法倍加关注，并一直处于不断改进之中。

1 经典会聚点方法

特约稿 2001-08-03 收到

国家自然科学基金重点项目 “高精度天体测量学参数的测定及其动力学应用”(19833010) 资助课题

国家重点基础研究规划项目子项目 “星系结构与动力学” (G1999075406) 资助课题

20 世纪 70 年代前，确定星团视差普遍采用会聚点方法[6~9]。如设 $\boldsymbol{V}$ 为团的整体运动矢量，μ 为自行，λ 为团到会聚点的角距离，则星团视差 $\hat{\pi}$ 可按下式计算：

$$\hat{\pi} = \frac{K\mu}{|\boldsymbol{V}|\sin\lambda} \tag{1}$$

式中 $K = 4.74047$ 为 1 天文单位的千米数与 1 儒略年所含的时秒数之比。如团的赤道坐标为 (α, δ)，会聚点坐标为 (A, D)，则 λ 的计算公式为：

$$\cos\lambda = \sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A) \tag{2}$$

其中会聚点赤道坐标 (A, D) 可按以下步骤计算：(1) 利用星团成员星的自行和视向速度 $(\boldsymbol{V}_{\rm r})$，确定团的平均空间运动速度 $\boldsymbol{V}$ 在日心坐标系中的三维直角坐标分量 $(X、Y、Z)$；(2) 由 $(X、Y、Z)$ 计算 (A, D)：

$$\left.\begin{aligned} {\rm tg}A &= \frac{Y}{X} \\ {\rm tg}D &= \frac{Z}{(X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

就本质上来说，经典会聚点方法采用的是两步解：首先利用自行 / 视向速度资料确定星团运动学参数 $(|\boldsymbol{V}|, A, D)$，然后再利用自行 / 视向速度资料及运动学参数 $(|\boldsymbol{V}|, A, D)$ 确定星团视差 $\hat{\pi}$。显然，由于这两步相互有关，且两次应用自行 / 视向速度资料，理论上是不严格的。对此，人们已多次加以评论，并提出了若干种改进方法[10~12]。

Upton[10] 提出利用团角直径的相对变化来确定星团距离，而无需知道团运动会聚点的位置。假设按某种方式恰当定义团的角直径 θ，则对于 θ 较小的团可以有

$$\frac{{\rm d}\theta}{\theta{\rm d}t} = -\frac{{\rm d}r}{r{\rm d}t} = -\frac{V_{\rm r}}{r} = -\hat{\pi}V_{\rm r} \tag{4}$$

式中 r 为团的距离，$V_{\rm r}$ 为视向速度。上式可以写成

$$\hat{\pi} = -\frac{\dot{\theta}}{\theta V_{\rm r}} \tag{5}$$

其中 $\dot{\theta} = {\rm d}\theta/{\rm d}t$ 为团角直径的变化，而 $\dot{\theta}/\theta$ 为相对变化。实际应用时，$\dot{\theta}/\theta$ 可以用团的自行的相对变化来取代。

其他一些改进途径仍然要求先确定会聚点的位置，只是采用的方法有所不同。比如，Brown[13] 用最大似然原理确定会聚点位置；Clube[14] 通过自行矢量分布模式找出会聚点，而 Hanson[11] 则用所谓最小二乘微分改正的方法。

以上改进方法除了仍然存在上述理论上不严格的问题外，为求得星团视差弥散度和运动学参数弥散度还必须进行第三步计算，而 Upton 方法则没有给出运动学参数。

2 最大似然估计方法

上面我们讨论了经典会聚点方法存在的理论上不严格问题。为了解决这一问题，应该同时求解包括星团视差、运动学参数及相应弥散度在内的全部未知参数。 Murray 和 Harvey[15] 导出了一组严格公式，并用来同时确定毕星团的运动学参数和视差，后者包括星团视差和团内每颗成员星的视差。他们建立的是一套矢量形式的非线性方程组。设 $\hat{\pi}_0$ 为视差采用值，第 i 颗恒星的视差为 $\hat{\pi}_0(1+\gamma_i)$ ，其中 γ_i 为相对星团平均视差的改正值， $\boldsymbol{r}_i$ 为第 i 颗恒星方向单位矢量， ρ_i 及 $\boldsymbol{\mu}_i$ 为第 i 颗恒星的视向速度和自行矢量， $\boldsymbol{U}$ 为 3×3 单位阵，则有

$$\hat{\pi}_0\rho_i = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{\mu}_i = (1+\gamma_i)(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{r}_i^T \cdot \boldsymbol{r}_i)\cdot \boldsymbol{a} \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{a} = \hat{\pi}_0\boldsymbol{V}$ 。式 (6) 是非线性方程组，必须用迭代方法解算。 Murray 和 Harvey[15] 把这一方法用于毕星团，但其结果似乎并不很理想。

我们曾提出了一种根据最大似然原理，利用星团成员星全部自行和视向速度观测资料，同时确定移动星团平均视差、运动学参数及相应弥散度的严格方法 [16] 。具体来说，对每一颗团星都可列出以下观测方程组：

$$\hat{\pi}(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) - A\mu_\alpha\cos\delta = \Delta_1$$

$$\hat{\pi}(-X\cos\alpha\sin\delta - Y\sin\alpha\sin\delta + Z\cos\delta) - A\mu_\alpha = \Delta_2 \tag{7}$$

$$X\cos\alpha\cos\delta + Y\sin\alpha\cos\delta + Z\sin\delta - V_\mathrm{r} = \Delta_3$$

式中 $(\mu_\alpha,\,\mu_\delta)$ 为自行分量，每一方向的残差 $\Delta_i(i=1,2,3)$ 可合理地假定服从数学期望值为零的高斯分布。于是 Δ_i 的后验概率为：

$$P_i = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\varepsilon_i}\exp\left(-\frac{\Delta_i}{2\varepsilon_i^2}\right) \quad (i=1,2,3) \tag{8}$$

其中 ε_i^2 为 Δ_i 的方差。作为一级近似，可以合理地假设团内成员星的内部运动服从三维高斯分布 [17] ，内禀速度弥散度为 σ_v ，而 $(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_3^2)$ 为 $(\mu_\alpha,\mu_\delta,V_\mathrm{r})$ 方向上的观测方差，以及 σ_π 为平均视差 $\hat{\pi}$ 的弥散度，则有

$$\varepsilon_1^2 = (\hat{\pi}^2+\sigma_\pi^2)\sigma_\mathrm{v}^2 + \sigma_\pi^2(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 + \sigma_1^2$$

$$\varepsilon_2^2 = (\hat{\pi}^2+\sigma_\pi^2)\sigma_\mathrm{v}^2 + \sigma_\pi^2(-X\cos\alpha\sin\delta - Y\sin\alpha\sin\delta + Z\cos\delta)^2 + \sigma_2^2 \tag{9}$$

$$\varepsilon_3^2 = \sigma_\mathrm{v}^2 + \sigma_3^2$$

于是全部观测量的似然函数为

$$\Phi = \prod_{s=1}^{3}\prod_{i=1}^{N} P_{s,i} \tag{10}$$

或者取它的对数形式

$$L = \ln\Phi = \sum_{s=1}^{3}\sum_{i=1}^{N}\ln P_{s,i} \tag{11}$$

根据最大似然原理，由式 (11) 有：

$$\frac{\partial L}{\partial q_l}=\frac{\partial \ln \Phi(q_l)}{\partial q_l}=0 \quad (l=1\sim 6) \tag{12}$$

式中 $q_l(l=1\sim 6)=(X,Y,Z,\hat{\pi},\sigma_\pi,\sigma_v)$ 为待定参数。由式 (12) 可以求得移动星团的运动学参数及其内禀速度弥散度，以及团的平均视差 $\hat{\pi}$ 与相应的弥散度 σ_π 。

上述方法已成功地用于毕星团 [16] 和昴星团 [18]，并取得了很好的结果。

3 近期进展

关于移动星团视差研究方法的近期进展主要包括以下几个方面：(1) 用模型星团和模拟计算检验方法的有效性；(2) 同时确定星团全部成员星的视差；(3) 详细讨论团内部系统性运动 (如膨胀或收缩等) 对结果的影响。

1997 年，Cooke 和 Eichhorn[12] 提出确定移动星团视差的梯度法。他们建立了赤纬自行分量 μ_δ 随 δ 变化的梯度及视向速度 V_r 随角距离 λ 的变化梯度与距离 (视差) 间的关系：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu_\delta}{\partial \delta}&=-\frac{V_r}{r}\\ \frac{\partial V_r}{\partial \lambda}&=-A|\boldsymbol{\mu}|r\end{aligned} \tag{13}$$

另外，他们还在仔细分析的基础上对待定参数作随机统计限制，并通过建立各种模型星团对方法有效性进行检验，得出梯度法比经典会聚点方法更为优越的结论，并成功地用于毕星团研究。

Davins 等人 [19] 在 1997 年提出一种新的最大似然解算方法，以同时确定星团的运动学参数、团内速度弥散度及各个成员星的视差，利用的观测资料仅限于团星位置和自行。de Bruijne[20] 把这一方法用于天蝎 OB2 星协。

设日心赤道直角坐标系中三个单位矢量为

$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}-\sin\alpha & -\sin\delta\cos\alpha & \cos\delta\cos\alpha\\ \cos\alpha & -\sin\delta\sin\alpha & \cos\delta\sin\alpha\\ 0 & \cos\delta & \sin\delta\end{pmatrix} \tag{14}$$

又定义矢量 $\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{\pi}_0,\mu\cos\delta,\mu\delta)^{\mathrm{T}}$ ，上标 T 表示矩阵转置，以及相应的 3×3 协方差矩阵为 $\boldsymbol{M}$ ，于是 $\boldsymbol{b}$ 的概率密度函数为

$$f(\boldsymbol{b})=(2\pi)^{-3/2}|\boldsymbol{M}|^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\right\} \tag{15}$$

式中

$$\boldsymbol{c}=(\hat{\pi},\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}.\boldsymbol{V}_0\hat{\pi}/k)^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{\mathrm{v}}\hat{\pi}/k)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{\mathrm{v}}\hat{\pi}/k)^2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

全部 n 组观测量的似然函数的对数形式为

$$L=\ln\prod_{i=1}^{n}f_i(\boldsymbol{b})=-\frac{3}{2}n\ln(2\pi)-\frac{1}{2}G \tag{18}$$

对 L 取极大，相当于对 G 求极小：

$$G=\sum_{i=1}^{n}\ln(\boldsymbol{N}_i)+\sum_{i=1}^{n}g_i \tag{19}$$

式中

$$g_i=(\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{c}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{c}_i) \tag{20}$$

从式 (18) 起有关量的下标 i 表示这些量属于第 i 颗恒星 $(i=1,2,\cdots n)$ 。

在现在的问题中，$G\equiv G(g_l)$, 待定参数 $g_l(l=1,2,\cdots n+4)\equiv(\hat{\pi}_i(i=1,2,\cdots n),\boldsymbol{V}_0,\sigma_{\mathrm{v}})$ 共有 $n+4$ 个，即 n 颗团星的视差、团的空间运动速度 $\boldsymbol{V}_0$ 的三个分量及其弥散度 σ_{v} 。方程 (19) 需用迭代法求解。

de Bruijne[20] 也通过构筑模型星团对方法的有效性进行了检验。考虑到天蝎 OB2 是一个星协，它含有三个次群，空间范围比一般疏散星团大，而且是一种非束缚系统，因而可能存在整体膨胀运动。他对上述复杂情况进行了十分详细的分析和讨论，结论是对天蝎 OB2 这样的星协，方法仍然十分有效。速度弥散度最大似然估计值的偏差不超过 ±0.6 km/s，星团视差的系统误差约为 ±0.1mas，与依巴谷三角视差的系统误差同量级。按最大似然方法求得的团星视差与依巴谷三角视差之间的差异很好地服从零均值单位方差的高斯分布，但精度提高了一倍。

最近，考虑到恒星视向速度观测资料的不断累积， de Bruijne 等人 [1] 对上述方法又作了进一步的改进。首先对式 (18) 的天体测量似然函数乘以视向速度修正因子，即

$$L\longrightarrow L\cdot\exp\left(-\frac{\Delta}{2\sigma_{\Delta}^2}\right) \tag{21}$$

式中 Δ 为就全部已有可靠视向速度资料 V_{r} 的团星所算得的 $(V_{\mathrm{r}}-V_{\mathrm{r,c}})/(\sigma_{V_{\mathrm{r}}}^2+\sigma_V^2)^{1/2}$ 的中值，其中

$$V_{\mathrm{r,c}}=X\cos\alpha\cos\delta+Y\sin\alpha\cos\delta+Z\sin\delta \tag{22}$$

是视向速度计算值。 σ_Δ 是 Δ 的可允许偏差，取 $\sigma_\Delta=0.5$ 。

第二项改进是把 $\boldsymbol{V}_0$ 和 σ_{v} 的确定与 n 个 $\hat{\pi}_i$ 的确定分开来处理，而且在确定 $\boldsymbol{V}_0$ 和 σ_{v} 后将求解 $\hat{\pi}_i$ 的 n 维问题转化为求解 n 个独立变量的一维问题，从而可以带来简化解算过程等若干优点。 de Bruijne 等人 [1] 把这一方法用于毕星团研究，改进了团的颜色 - 绝对星等图，分析了团的速度场，并得出不存在自转或剪切运动的结论。

正如本文开始所指出的那样，鉴于移动星团视差精确测定对天体物理若干问题研究的重要性，在一个世纪的时间内，在不断累积有关观测资料并提高其精度的同时，人们对星团视差测定方法不断加以改进，从经典会聚点方法的两步解，到最大似然估计的合理引入和精化，而这一过程无疑是同计算工具的改进分不开的。在 Smart 所处的时代，即使提出最大似然估算方法，实际上也完全不可能加以实现。

4　讨　　论

我们认为，就移动星团视差研究方法目前状态来看，有几个问题值得进一步加以讨论或改进：

(1) 在 Davins 等人 [19] 和 Bruijne[20] 采用的方法中，所利用的观测资料除了恒星的位置外，只用到自行，这客观上是因为依巴谷卫星上天后提供了大批恒星的高精度自行。然而视向速度资料的合理应用是很重要的，尤其对一些较远的移动星团。Bruijne 等人 [1] 已经考虑到这一点，但他们的方法并没有充分利用好视向速度观测资料。更合理的做法也许应该在似然函数中包含视向速度，与自行一起用以解算待定参数。这样做公式会变得更复杂，但从理论上看是没有困难的。

(2) 利用最大似然估计同时解出全部团星的视差 (距离) 虽然在理论上是严格的，但实际求得的视差值就单个恒星来讲其可靠性 (精度) 基本上取决于相应恒星的自行 / 视向速度测定精度。因此，单个恒星视差值主要具有统计意义。有关作者对这类视差可靠性的检验也只是指出统计上与三角视差相一致，或两者之差符合高斯分布等。所以，由最大似然法取得的单个恒星视差值的应用应该特别小心。

(3) 不少作者已对方法的有效性通过随机构筑模型星团来加以检验 [12,19,20]，但是，这些星团模型各方面的性质与星团实际情况的统计符合程度对检验本身的结论无疑是有影响的。比如，Cooke 和 Eichhorn[12] 考虑了模型星团中恒星应在位置和速度空间上随机分布 (正态分布)，de Bruijne[20] 更进一步考虑了恒星的目视星等，以及初始质量函数呈幂律分布，并规定了质量上限等。模型星团中这类因素的考虑应该随实际团的情况而定。如果团的年龄较大，可能还要考虑恒星的质量分层效应。星团模型构筑得越合理，方法有效性检验的结果就越有说服力。

(4) 尽管从理论上改进方法是重要的，但随着方法的日臻完善，观测资料的数量积累和质量提高便成为主要问题，必须给以充分的重视。否则，观测资料可能成为制约最后结果的首要因素，而在这种情况下，理论解算方法再改进也没有多大意义了。

(5) 不同的星团有不同的情况，比如距离不同、空间范围大小不同、年龄上的差异、成员星星数的多寡、可用观测资料的数量以至质量的不同，甚至研究工作的目的不同等。同一种方法是否对所有这些不同情况的星团都是最佳的方法，也许是值得讨论的。

参 考 文 献

1 de Bruijne J H, Hoogerwerf R, de Zeeuw P T. Astron. Astrophys., 2001, 367: 111
2 Pels G, Oort J H, Pels-Kluyver H A. Astron. Astrophys., 1975, 43: 423
3 Reid N. M.N.R.A.S., 1993, 265: 785
4 Perryman M A C. Astron. Astrophys., 1998, 331: 81
5 Hodge P W, Wallerstein G. Publ. Astron. Soc. Pac., 1966, 78: 411
6 Boss L. A. J., 1908, 26: 31
7 Smart W M. M.N.R.A.S., 1939, 99: 168
8 容建湘. 恒星天文学, 北京: 高等教育出版社, 1986
9 Bertiau F C. Ap. J., 1958, 128: 533
10 Upton E K L. A. J., 1970, 75: 1097
11 Hanson R B. A. J., 1975, 80: 379
12 Cooke W J, Eichhorn H K. M.N.R.A.S., 1997, 288: 319
13 Brown A. Ap. J., 1950, 112: 225
14 Clube S V M. Observatory, 1974, 94: 126
15 Murray C A, Harvey G M. Roy. Obs. Bull., 1976, 182: 15
16 Zhao J L, Chen L. Astron. Astrophys., 1994, 287: 68
17 Popowski P, Gould A. Ap. J., 1998, 506: 259
18 陈力, 赵君亮. 天文学报, 1997, 38: 113
19 Davins D. ESA, Sp-402, 1997, 733
20 de Bruijne J H J. M.N.R.A.S., 1999, 310: 585

Progress in the Studies on Moving Cluster Parallax

Zhao Junliang Chen Li

(Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai, 200030)

Abstract

The precise determination of moving cluster parallaxes plays an important role in the calibration of cosmic distance scale as well as many other astrophysical relations. Various models and improvements on determination of moving cluster parallax have been made in the last century. This paper gives a brief review on the progress of moving cluster parallax determination, including some work done by the authors.

Key words cluster: moving cluster—parallax—method: observational