

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2015.03.05

黑洞磁层解析解的研究进展

徐兆意, 王建成

(中国科学院 云南天文台 天体结构与演化重点实验室, 昆明 650011)

摘要: 黑洞磁层理论在高能天体物理研究中扮演着重要角色, 如活动星系核相对论性喷流的产生机制、伽玛射线暴等。寻找黑洞磁层的解析解对于理解这些重要天体的物理过程具有重要的意义。主要对黑洞磁层理论及其解析解的研究进行回顾。首先, 详细地介绍了黑洞电动力学与黑洞无力磁层理论的主要内容, 并讨论了从旋转黑洞提取能量的 BZ 机制。然后, 回顾了过去几十年天文学家们寻找黑洞无力磁层解析解的发展历程与主要成果, 并详细地介绍了无穷远处渐进解的求解思想与过程, 给出这些研究对于寻找解析解的启发, 分析了当前求解 Grad-Shafranov 方程 (简称 GS 方程) 所面临的主要问题与挑战。最后, 讨论了黑洞磁层解析解研究的工作方向。

关键词: 克尔黑洞; 无力磁层; GS 方程; 解析解

中图分类号: P145.8 **文献标识码:** A

1 引言

最近几十年的天文观测及研究表明, 黑洞在高能天体物理中扮演着重要的角色, 因而它不仅是爱因斯坦引力场方程的一个解。黑洞对宇宙中较为剧烈的天文现象起着重要的作用, 如与活动星系核、伽玛射线暴有关, 这些天体的能源机制主要有两种途径: 一是黑洞通过吸积物质将引力能转化为电磁辐射与热能, 进而有效地提供天体的能源; 另一方面, 当旋转黑洞上存在大尺度磁场并且当其位形满足某些条件的时候, 将通过 Blandford-Znajek 过程将黑洞的转动能提取出来, 这些过程与弯曲时空中的电动力学或黑洞磁层有着密切的联系。

1969 年, Penrose^[1] 基于克尔黑洞能层中存在粒子的负能轨道, 提出了从旋转黑洞提取能量的可能性。1977 年, Blandford 和 Znajek 在脉冲星无力磁层研究的基础上^[2], 将无力磁层理论推广到黑洞情形, 提出在克尔黑洞存在大尺度磁场情形下的提能机制^[3], 也就是所谓的电磁彭罗斯过程, 也称为 BZ 机制。BZ 机制为活动星系核中相对论准直喷流的产生提供了可能, 这一过程比彭罗斯过程更具有现实意义, 他们的理论建立在黑洞无力磁层的基础之上,

收稿日期: 2015-01-12; 修回日期: 2015-04-01

资助项目: 国家自然科学基金 (11133006, 11163006, 11173054); 中国科学院先导 B 专项 (XDB09000000)

通讯作者: 徐兆意, zyxu88@ynao.ac.cn

在原始的文献中^[3]他们还推导了在稳态、轴对称的弯曲时空中无力磁层所满足的方程,即著名的 GS 方程。这是研究无力磁层所面临的主要方程,后来 Znajek 还找到了在黑洞视界上电磁场所满足的边界条件^[4]。他们的工作是在四维时空中做的,不容易看出相应物理量的物理意义。因此,1982 年 Thorne 等人将无力磁层理论在时空的 3+1 分解情形做了研究^[5, 6],几年之后他们提出了黑洞的膜范例图景^[7, 8],在这种情形中,黑洞视界被认为是一层导电膜,拥有一定的电阻,而黑洞具有巨大的电压,相当于一个超级电源,源源不断地向外提供能量,这种图像在物理上尽管存在一些问题,但用时空 3+1 分解处理之后的形式很符合天文学家的习惯,因而被广泛采用,成为人们研究黑洞磁层的常用形式。此后,人们对黑洞磁层的相关特性做了大量的研究,并推广了这些理论;但是,鉴于问题的复杂性,人们在解析解的研究上进展缓慢。

然而,要想知道黑洞附近磁层的性质与结构,求解 GS 方程是非常必要的。GS 方程是一个复杂的非线性偏微分方程,再加上在磁层中存在奇面以及未知函数的个数较多等因素,这就为求解该方程带来了困难。到目前为止,唯一的渐进解在 2005 年由 Menon 与 Dermer 所得到^[9]。这为我们了解黑洞磁层带来了极大的困难。

对于这个方程解的研究进展,学者们主要有如下几个工作。首先是 Blandford 与 Znajek^[3]最先发展了微扰理论,即当旋转参数很小的时候,可以看做是对史瓦西黑洞的微扰,而在史瓦西黑洞情形时的 GS 方程是可解的。由于问题的复杂性,他们只找到了分离单极场和抛物型磁场位型的微扰解,这些微扰解后来广泛地用于数值模拟的研究中。最近, Pan 和 Yu 求出纵向均匀磁场位型时的微扰解^[10],这个解对喷流的研究具有一定的意义。其次,在 Komissarov 于 2004 年有关黑洞电动力学的工作基础上^[11],2005 年前后, Menon 和 Dermer 求得了在渐进无穷远处的精确解^[9],这是继 1977 年建立该方程以来首次得到非全局解析解。最近, Brennan 等人得到电流密度在类光条件下的一些解^[12],这些解对于了解真实的黑洞磁层过程用处不是很大。哈佛大学的 Lupsasca 等人利用 Kerr/CFT 的方式求得在极端克尔黑洞视界附近的某些解^[13, 14]。在黑洞无力磁层数值模拟方面的主要工作有:2001 年至 2004 年 Komissarov^[11, 15, 16]利用广义相对论磁流体力学的数值模拟发现 BZ 的单极解是渐进稳定的; Uzdensky^[17]在 2005 年讨论了黑洞无力磁层的 Light Surfaces 在物理上的重要性; Contopoulos 等人^[18]在 2013 年利用 Light Surfaces 自洽地得到分离单极场下任意磁场角速度和单极电流的分布;2014 年 Nathanail 等人^[19]的研究结果表明,黑洞磁层中的电流在耗散黑洞转动能和高能辐射方面起着重要作用。这些工作对人们了解黑洞磁层的结构具有重要的意义,由于数值解可以考虑较为真实的物理条件,因而数值解更为接近物理的真实情况;解析解只对应于简单的物理情况,但它提供的磁场位形图像更清晰,使我们更容易理解结果。为了更好地了解黑洞磁层的性质与结构,我们要求解全局时空的磁层解,同时适用于任何旋转速度的解,而黑洞磁层的研究又是人们理解高能天体物理现象的关键。有理由相信,当天文观测能力进一步提高到能解释黑洞附近发生的天文现象的时候,求解该方程将是紧迫的。

本文将对黑洞无力磁层的理论和求解磁层的努力进行介绍和回顾。首先,将较详细地介绍黑洞电动力学与黑洞无力磁层理论的主要内容,简单介绍提取黑洞旋转能的 Blandford-

Znajek 机制。其次, 将详细介绍黑洞无力磁层 GS 方程解析解的研究进展, 推导 Menon 和 Dermer 得到的渐进解, 并讨论他们的方法对寻找解析解的启示。最后, 通过对黑洞磁层理论研究中理论的分析以及存在的问题, 讨论和展望将来黑洞磁层解析解研究的方向。

2 黑洞磁层理论简介

2.1 黑洞电动力学

黑洞电动力学是研究黑洞时空背景下的电动力学。在天体物理中, 人们感兴趣的是旋转黑洞, 即克尔黑洞背景中的电磁过程; 因而需要研究爱因斯坦引力场方程与麦克斯韦方程组。对于克尔黑洞与史瓦西黑洞, 爱因斯坦引力场方程的解已知, 因而只需研究在相应时空度规下的麦克斯韦方程组, 黑洞电动力学的任务便是处理这些方程组, 以便得出对于黑洞附近电磁现象理解有用的结论。

自 1977 年 Blandford 和 Znajek 提出黑洞磁层理论之后, 该领域经历了极大的发展。在形式上主要有 1982 年 Thorne 和 Mackond 提出的 3+1 形式的黑洞电动力学^[5, 6], 他们利用的是朗道和里普希兹发展的时空 3+1 分解形式^[20], 这种形式就是一致性方法, 然而, 这种方法有一个问题是 Boyer-Lindquist 坐标系在黑洞视界处的奇异性。2004 年 Komissarov 克服了这个困难并发展了比前者更加一般的新形式电动力学^[11]。这种电动力学可能更利于黑洞磁层理论解的研究, 因而这里将采用它来介绍黑洞电动力学理论。

由于在四维时空的某些远场近似与渐进区域中, 问题会变得相对容易, 而在绝对的三维空间中, 很多问题会变得比较简单, 因而人们发展了在绝对空间中的电动力学^[11], 期望能利用这种形式来研究黑洞电动力学与后面的黑洞无力磁层的解析解。

对于强引力的系统, 广义相对论效应将变得很重要, 在实际的天体物理中, 旋转天体的情形变得很普遍。在定态情形, 描述转动质量周围的时空几何是克尔解。在克尔时空中 Boyer-Lindquist 系为 t, r, θ, φ , 其时空度规为:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}d\varphi dt + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 \quad . \quad (1)$$

克尔黑洞的时空结构如图 1 所示, 在外视界和外无限红移面之间存在一个能层。可以证明, 在能层中, 存在粒子运动的负能轨道, 即引力束缚能超过了静质量与动能之和, 这使得从旋转黑洞提取能量成为可能, 彭罗斯于 1969 年就提出了这种可能性^[1]。

对克尔时空做 3+1 分解之后, 度规形式为:

$$ds^2 = (\beta^2 - \alpha^2) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad , \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= -1 + \frac{2Mr}{\rho^2} \quad , \quad \beta_\varphi = \frac{-2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \quad , \\ \gamma_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta} \quad , \quad \gamma_{\theta\theta} = \rho^2 \quad , \quad \gamma_{\varphi\varphi} = \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \quad , \end{aligned}$$

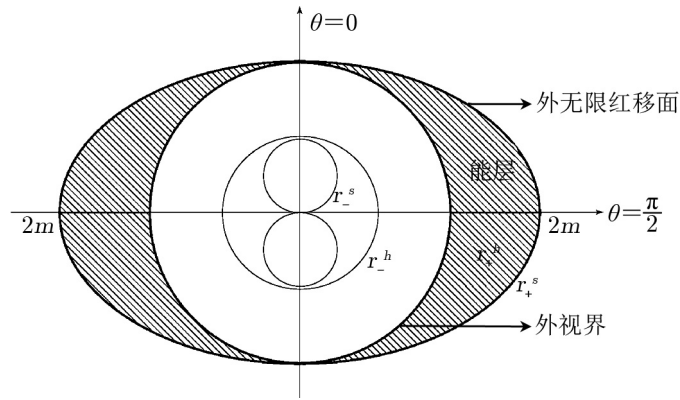


图 1 克尔黑洞的时空结构

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2,$$

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta, \quad \alpha^2 = \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2}, \quad \beta^2 = \frac{\beta_\varphi^2}{\gamma_{\varphi\varphi}},$$

$$\sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma} = \rho^2 \sin \theta. \quad (3)$$

其中, $i = r, \theta, \varphi$, α 为时间渡越因子, β 位移矢量, M 为黑洞质量, a 为黑洞的旋转参数, 即单位黑洞质量的角动量, 度规是稳态轴对称的, γ_{ij} 是超曲面上的三维空间度规。

为了研究克尔黑洞附近的电磁理论, 需要写出在该时空下的协变麦克斯韦方程组, 形式如下:

$$\nabla_\beta *F^{\alpha\beta} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = I^\alpha, \quad (5)$$

其中, $F^{\alpha\beta}$ 为电磁场的麦克斯韦张量, $*F^{\alpha\beta}$ 为法拉第张量, I^α 为四维电流矢量。

将上面的麦克斯韦方程组做 3+1 分解, 这些方程将具有特殊的形式, 将这些方程分解为时间部分与空间部分, 通过相关的推导, 得到比较简洁的麦克斯韦方程组如下:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (8)$$

$$-\partial_t \mathbf{D} + \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (9)$$

其中, ∇ 是与度规相适配的拉普拉斯算子, 其它的电磁场量与 2004 年 Komissarov 的文章^[11]一致。在弯曲时空里面, 真空中电磁场将满足如下关系:

$$\mathbf{E} = \alpha \mathbf{D} + \beta \times \mathbf{B} \quad , \quad (10)$$

$$\mathbf{H} = \alpha \mathbf{B} - \beta \times \mathbf{D} \quad . \quad (11)$$

α 和 β 包含了时空弯曲的几何信息, 可以看到, 在离黑洞无穷远的地方, 时空将变为平直时空, 此时有 $\alpha = 1, \beta = 0$, 因此

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} \quad , \quad \mathbf{E} = \mathbf{D} \quad . \quad (12)$$

考虑到克尔时空的稳态与轴对称性, 同时根据诺特定理, 能量和角动量是守恒的, 它们有如下形式:

$$\partial_t e + \nabla \cdot \mathbf{S} = -(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) \quad , \quad (13)$$

$$\partial_t l + \nabla \cdot \mathbf{L} = -(\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{m} \quad . \quad (14)$$

其中, 体能量密度为 $e = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$, 角动量密度为 $l = (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{m}$, 能流为 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, 角动量流为 $\mathbf{L} = -(\mathbf{E} \cdot \mathbf{m})\mathbf{D} - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{m})\mathbf{B} + \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\mathbf{m}$ 。

在克尔黑洞附近, 由于电磁场的无力条件将黑洞附近的时空分为几个区域, 在每一个区域中, 电磁场将满足一定的条件, 如图 2 所示, 区域 1 是指克尔黑洞, 区域 2 满足无力场条件。在区域 3 中, 由于磁场十分微弱, 粒子的惯性力变得比较大, 无力条件不再满足, 但满足磁流体力学近似; 由于在黑洞磁层中粒子不能加速, 而在区域 3 中可以加速, 所以区域 3 称为加速区; 在此区域中, 主要通过费米一级加速过程和费米二级加速过程来对气体进行加速。

2.2 克尔黑洞的无力磁层

在 2.1 节的黑洞电动力学的基础上加一个条件, 即无力条件, 此时将考虑如图 2 中黑洞附近的电磁现象, 因而黑洞电动力学变为黑洞无力磁层理论, 考虑稳态轴对称的克尔黑洞, 则度规对时间和 φ 的导数均为零。在四维形式下, 无力条件为:

$$F_{\alpha\beta} J^\alpha = 0 \quad . \quad (15)$$

在绝对空间标架中, 无力条件变为:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0 \quad , \quad (16)$$

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (17)$$

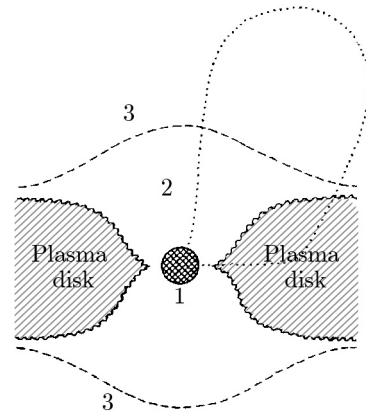


图 2 黑洞附近按是否满足无力场条件进行的分区^[21]

考虑麦克斯韦方程组以及式 (10) 和 (11), 将电场强度和磁感应强度分解为环向分量和极向分量, 将会得到:

$$E_T = 0 \quad , \quad (18)$$

$$E_P \cdot B_P = 0 \quad . \quad (19)$$

则环向电场为零, 因此电场只有极向部分。由于磁场是轴对称的, 磁场在环向与极向均有分量, 均可用闭合的磁力线来表示。其中环向分量有着重要的物理意义, 在大尺度上它将形成螺旋状的磁场, 可以将带电流体约束在轴向特定的形状之内, 这就为解释活动星系核喷流的准直机制提供了途径; 而极向磁场对于提能有重要的作用。

从式 (18) 和 (19) 得到存在一个矢量 $\omega = \Omega \partial_\varphi$, Ω 是磁场的旋转角速度, 则电场与磁场的关系为:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \quad , \quad (20)$$

根据麦克斯韦方程, 有

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \Omega = 0 \quad , \quad \mathbf{B} \cdot \nabla H_\varphi = 0 \quad . \quad (21)$$

即, Ω 和 H_φ 在磁力线上为常数, 否则磁力线将会违反稳定性的要求, 由于轴对称性, 这两个物理量在磁面上也为常数, 这些磁面在黑洞附近形成一些磁通管的形状, 如图 3 所示。

下面将利用前面的事实, 得到 GS 方程, 这里将做一个简单的推导。由于度规满足轴对称性与稳态, Ω 是 r 和 θ 的函数, 通过安培定理可以知道环向磁场的信息, 这里不再讨论。这里关心的是极向磁场, 它可以表示为:

$$B_P = \frac{\Lambda}{\sqrt{\gamma}} (-\Omega_{,\theta} \partial_r + \Omega_{,r} \partial_\theta) \quad , \quad (22)$$

图 3 克尔黑洞磁层的膜范例模型的磁通管^[22]

其中, Λ 是 r 和 θ 的任意函数。由于磁场的散度为零, 故有:

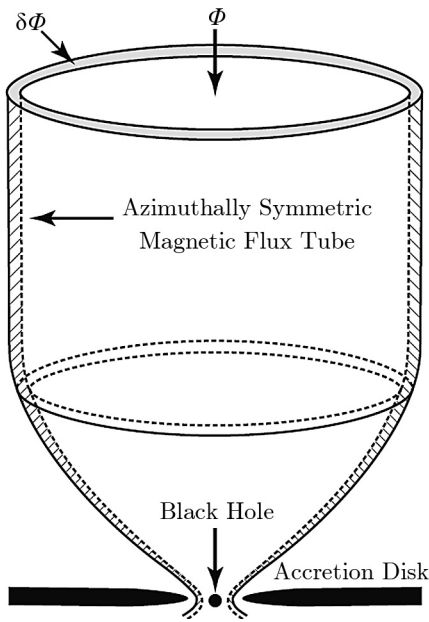
$$A_{,r} \Omega_{,\theta} = A_{,\theta} \Omega_{,r} \quad . \quad (23)$$

Blandford 和 Znajek^[3] 于 1977 年提出 $\Lambda d\Omega \equiv -dA_\varphi$, 由该式可以得到极向电场的表达式:

$$E_P = \Lambda d(\Omega^2/2) = d \int \Lambda \Omega d\Omega \quad , \quad (24)$$

和

$$D = D_P = \frac{\Lambda}{\alpha} (\Omega + \beta^\varphi) d\Omega \quad . \quad (25)$$



用同样的方法, 可以得到磁场的表达式:

$$H_P = (\alpha^2 - \beta^2 - \beta_\varphi \Omega) \frac{B_P}{\alpha} . \quad (26)$$

将这些量代入麦克斯韦方程组, 电荷密度由 D_P 的散度给出, 而电流密度由 H_P 给出, 它们表达式如下:

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma} \rho = & \partial_r \left[\frac{\Lambda}{\alpha \sqrt{\gamma}} (\gamma_{\varphi\varphi} \Omega + \beta_\varphi) \gamma_{\theta\theta} \Omega_{,r} \right] + \\ & \partial_\theta \left[\frac{\Lambda}{\alpha \sqrt{\gamma}} (\gamma_{\varphi\varphi} \Omega + \beta_\varphi) \gamma_{rr} \Omega_{,\theta} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma} J^\varphi = & H_{\theta,r} - H_{r,\theta} = \partial_r \left[\frac{\Lambda}{\alpha \sqrt{\gamma}} (\alpha^2 - \beta^2 - \beta_\varphi \Omega) \gamma_{\theta\theta} \Omega_{,r} \right] + \\ & \partial_\theta \left[\frac{\Lambda}{\alpha \sqrt{\gamma}} (\alpha^2 - \beta^2 - \beta_\varphi \Omega) \gamma_{rr} \Omega_{,\theta} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

将无力条件满足的方程分解为环向部分与极向部分, 并将相关的电磁场量代入, 通过一定的计算, 将会得到约束方程, 也就是 GS 方程:

$$\frac{1}{2\Lambda} \frac{dH_\varphi^2}{d\Omega} = \alpha (\rho \Omega \gamma_{\varphi\varphi} - J_\varphi) . \quad (29)$$

为了得到具体的表达式, 将前面得到的电荷密度和电流密度的表达式代入, 从而得到著名的 GS 方程:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Lambda} \frac{dH_\varphi^2}{d\Omega} = & \frac{\alpha \gamma_{\varphi\varphi}}{\sqrt{\gamma}} \left[\Omega \partial_r \left(\frac{\Lambda}{\alpha \sqrt{\gamma}} (\gamma_{\varphi\varphi} \Omega + \beta_\varphi) \gamma_{\theta\theta} \Omega_{,r} \right) + \Omega \partial_\theta \left(\frac{\Lambda}{\alpha \sqrt{\gamma}} (\gamma_{\varphi\varphi} \Omega + \beta_\varphi) \gamma_{rr} \Omega_{,\theta} \right) + \right. \\ & \left. \partial_r \left(\frac{\Lambda}{\alpha \sqrt{\gamma}} (\beta^2 - \alpha^2 + \beta_\varphi \Omega) \gamma_{\theta\theta} \Omega_{,r} \right) + \partial_\theta \left(\frac{\Lambda}{\alpha \sqrt{\gamma}} (\beta^2 - \alpha^2 + \beta_\varphi \Omega) \gamma_{rr} \Omega_{,\theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

如果 Ω 和 Λ 是极向函数, 则 H_φ 是 Ω 的函数, 表示为 $H_\varphi = H_\varphi(\Omega)$ 。这个约束方程里有3个未知函数, 即 Ω 、 Λ 和 H_φ , 这3个独立的未知函数将完全确定磁层的物理性质。很明显, 这个方程不封闭, 因为一个方程要确定3个未知函数; 因此, 在求解方程时, 必须要引入两个自治的符合物理环境的条件, 如何得到这样的条件将是一个难题。这个方程本身的复杂性使得人们在求解它时遇到极大的困难, 至今还没有找到一个全局的解析解, 因而人们只能研究特殊情形时的解。

为了确定方程的解, 需要边界条件, 而黑洞视界处的边界条件于 1978 年由 Znajek^[4] 找到, 他们利用电磁场在黑洞视界处的非奇异性, 得到了在黑洞视界上电磁场满足的边界条件, 在本文使用的形式中其表达式为:

$$H_\phi = \frac{\sin^2 \theta}{\alpha_+} (2r_+ \Omega - a) B^r = \frac{(2r_+ \Omega - a) \sin \theta}{r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta} A_{\phi,\theta} . \quad (31)$$

2.3 克尔黑洞提能机制: BZ 过程

众所周知,快速旋转黑洞的旋转能量是非常巨大的,如果能将其提取出来,也许能够解释如喷流等一些高能天文现象。1977年,Blandford和Znajek在黑洞磁层理论的基础上提出了这种可能^[3]。这种过程的基本物理图像如下^[23]:在黑洞吸积盘靠内的区域,由于吸积盘上的物质为等离子体状态,其导电性非常强,因而磁力线将被冻结在等离子体中,将随着等离子体运动,当这些等离子体运动到黑洞视界附近并落入黑洞的时候,等离子体粒子将与它所附上的磁力线脱离因果联系;然而,磁力线不会被自由释放开来,由于磁通量的守恒,将使磁力线不能分离,再加上附近磁场的磁压,这些磁力线将会被向内挤压,并穿过黑洞。由于稳定性要求,磁力线将保持角速度恒定,在远离旋转轴的某个地方将会超过光速,由于磁力线并非物理实体,因此并不违反狭义相对论。利用这种方法,则有如下结果,根据电磁学理论,带电粒子围绕磁力线做螺旋运动,由于光速是自然界中速度的极限,带电粒子不可能沿磁力线一直运动下去,当速度接近光速时,带电粒子将会离开磁力线,然后离开吸积盘,最后被甩出去。从宏观的角度来看,克尔黑洞就像浸泡在大尺度磁场中的导电球体,由于黑洞视界相对于磁力线运动,根据法拉第电磁感应定律,将会产生电流,该电流受到安培力的作用使得黑洞转动变慢,因而就提取了黑洞的转动能;同时,另外一部分能量耗散到黑洞视界面上,增加了黑洞的热力学熵。这就是高能粒子流产生的基本图像。图4为黑洞磁层中粒子运动的示意图。

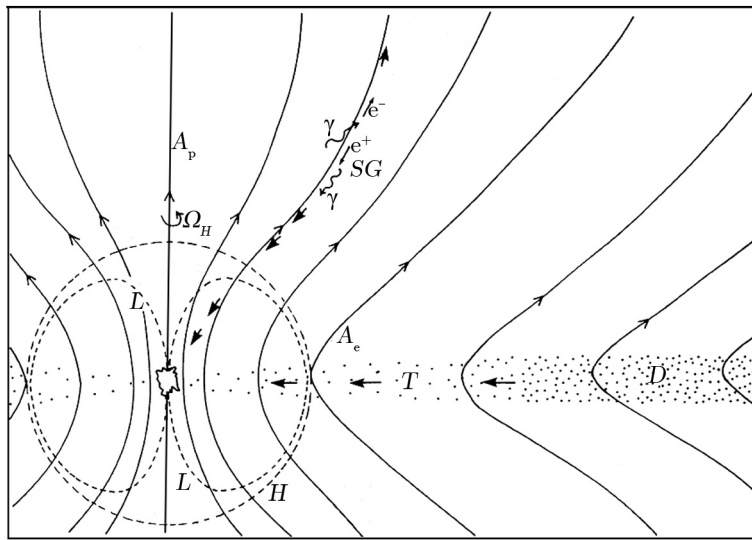


图4 黑洞磁层中粒子如何被提取的示意图^[3]

此外,在黑洞附近BZ过程的能流提取如图5所示,图中的物理量由在零角动量处观测者测量得到,其中, \mathbf{K} 是黑洞因为感应电流而受到的安培力,这个力作用到黑洞上,使黑洞旋转变慢。

Blandford和Znajek^[3]已经得到能流与角动量流随时间的关系式,在3+1形式的黑洞无

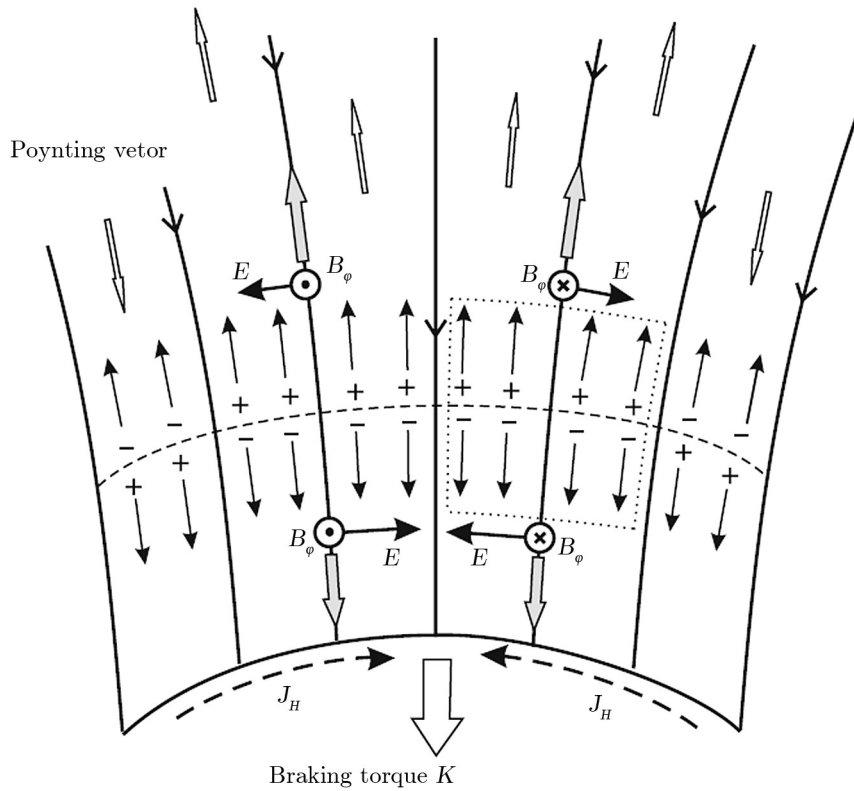


图 5 黑洞附近坡印亭电磁能流提取的示意图^[24]

力磁层理论中, 可以用一种与之等价的形式来表示:

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dAdt} = S^r \sqrt{\gamma_{rr}} = -H_\phi \Omega B^r \sqrt{\gamma_{rr}} \quad (32)$$

$$\frac{d^2\mathcal{L}}{dAdt} = L^r \sqrt{\gamma_{rr}} = -H_\phi B^r \sqrt{\gamma_{rr}} \quad (33)$$

从表达式中可以看到, 如果知道 GS 方程中那三个函数的表达式, 就能了解黑洞电磁提能的细节。然而, 这是非常困难的。但是, 人们可以在微扰下粗略地估计 Blandford-Znajek 过程中能流或者功率的表达式^[3, 16]。

在 Blandford-Znajek 过程提出之后, 人们提出了各种各样的提能机制, 除了彭罗斯过程和 BZ 过程之外, 其他还有磁彭罗斯过程^[25], MHD BZ 过程^[26-28], MHD 彭罗斯过程^[26, 27, 29, 30], 磁重联过程^[31], 超辐射^[32-35]等。其中最有可能的提能机制是 BZ 过程或 MHDBZ 过程^[36]。

2.4 黑洞磁层与喷流物理和黑洞吸积

按照黑洞附近磁场位形的不同, 磁层对于黑洞吸积系统将会起不同的作用。当磁场从黑洞或吸积盘延伸到无穷远时, 通过 BZ 过程能将黑洞的转动能提取出来, 用于产生喷流, 此

时黑洞旋转轴附近还会形成环向螺旋形磁场,用于喷流的准直^[3, 5, 6, 37];当磁场从黑洞连接到吸积盘时,能量和角动量将会在吸积盘和黑洞之间转移,这就是磁耦合过程^[38-42]。下面将分别讨论这两种物理过程。

AGN 喷流的产生和准直机制是高能天体物理中重要的问题之一,正是由于这些问题,Blandford 与 Znajek 才提出了黑洞磁层的理论模型^[3],并利用 BZ 过程较好地解释喷流的能量来源与喷流准直机制。在这种模型中,假定黑洞与远处天体通过磁力线连接,黑洞的转动将扭动着磁力线转动,坡印亭能流和角动量流被转移出来,这可以用来解释喷流的产生;同时在旋转轴附近将会形成环向螺旋形的磁场,它可以将粒子流束缚在轴向的特定区域之内,这就为喷流的准直提供了解释。通过计算发现 BZ 过程的提能功率与吸积盘内区的磁场强度有关,磁场的大小限制了功率的大小^[43];同时,由于黑洞的旋转会使磁力线产生螺旋不稳定性,从而限制黑洞视界附近极向磁场的分量,进而限制了提能功率的大小^[44, 45]。因而,这种模型可能在喷流的产生过程中起的作用没有想象的那么大,但它仍然是喷流产生机制的几种主要模型之一。在观测上,2014 年 Zamaninasab 等人^[46]发现,在一些射电噪 AGN 中喷流的磁通量和吸积盘的光度存在相关性。

黑洞磁层对于黑洞吸积的影响,主要体现在所谓的磁耦合过程中。当在黑洞视界面和吸积盘之间存在闭合的磁力线时,能量流和角动量流将会在吸积盘和黑洞之间转移。由于在吸积盘上磁力线是冻结在等离子体中的,因此吸积盘转动的角速度等于磁力线的角速度,当黑洞的转动角速度大于磁力线的角速度时,能量流和角动量流将从黑洞转移到吸积盘,类似于 BZ 过程;反之,能量流和角动量流将从吸积盘转移到黑洞,类似于吸积过程。从观测上证实磁耦合过程的一个证据来自 AGN 吸积盘内区很高的发射率指数^[47]。

3 解析解的研究进展

自从黑洞无力磁层理论提出来之后,人们又进一步研究黑洞磁层的结构与性质的细节。吸积盘的存在为黑洞附近磁场的产生提供了可能的途径,而大尺度磁场在黑洞磁层理论中有重要的作用。在活动星系核和伽玛射线暴中,考虑磁流体力学模型的黑洞磁层将变得很重要。过去几十年时间里,尽管天文学家们做了许多工作,却还是没有构建出一个自洽的黑洞磁层模型。而磁层模型能很好地解释一些关键的问题,如黑洞中心引擎的能量提取与物质的转移率,以及在旋转轴附近喷流的准直机制,进而考虑吸积盘的磁层问题。如果有黑洞全局时空的解析解,回答上面的问题将成为可能。

首先,考虑较为简单的情形,即史瓦西黑洞时的磁层解,这种情形已经被很好地研究;其次,考虑黑洞低速旋转时的磁层解,即求解黑洞磁层的微扰理论,此理论在 BZ77 的文章中已经研究,用这种方法,人们找到了三种磁场位形的微扰解;再次,2005 年科学家们找到了适合于任何旋转速度的克尔黑洞磁层无穷远处的渐进解。但是,从 1977 年到现在,科学家们做了各种尝试,依然没有得到快速旋转克尔黑洞全局时空下的解析解,仅为寻找解析解提供了某些线索。下面介绍几个主要的进展。

3.1 史瓦西黑洞的磁层解

考虑到方程的形式对于讨论问题的影响, 这里将利用膜范例形式的 GS 方程^[6, 48, 49], 如果考虑史瓦西黑洞情形, 方程将变得很简单, 需要处理的是如何选择电流的形式, 对于不同形式的选择, 可以用来研究圆柱形喷流的准直^[50-52]。如果要使与电流相关的项为零, 在天体物理中, 有两种重要的情形可以考虑: 首先是真空情形, 这种情形的解已经被研究过了^[3, 53-55]; 其次是电流为常数情形^[56, 57]。在这些工作的基础上, Ghosh 于 2000 年对史瓦西黑洞磁层的解做了较为完整的研究^[58], 为了更容易求得这种情况下的解, 他们同样采用了 Thorne 与 Mackond 所发展的形式, 这种形式的方便之处在于更接近传统的微分方程的标准形式, 黑洞不转动且电流选择的形式使得与电流有关的项为零时, 方程将简化为拉普拉斯方程, 此时可以用分离变量的方法进行求解。这些解可以表示为一些特殊函数。这里将画出低阶的几种磁场位型的解, 分别如图 6 所示。

这些解对于研究黑洞磁层有重要意义, 它既是人们研究克尔黑洞磁层的极限情况, 又是人们求解微扰解的基础, 同时对于数值研究黑洞磁层也有重要的作用。

3.2 低速旋转黑洞的磁层解

对于史瓦西黑洞无力磁层的 GS 方程可以用分离变量求解, 因此很自然地就会想到对史瓦西黑洞做微扰, 以便求出旋转参数很小时的黑洞磁层解。1977 年, Blandford 和 Znajek^[3]最早发展了微扰理论, 由于问题的复杂性, 他们只求出最简单的两种微扰解, 分别是分离单极场和抛物型场的微扰解, 后来, Pan 与 Yu^[10]求出了纵向均匀磁场的微扰解。这些微扰解对于我们研究黑洞磁层很重要, 它们可以被用来了解黑洞磁层的某些性质, 以及做数值计算。图 7 为分离单极场与抛物形磁场的微扰解的磁层结构。

3.3 一般克尔黑洞磁层无穷远处的渐进解

2005 年, 在 Komissarov 所发展的黑洞电动力学形式的基础上, Menon 与 Dermer 推导出 H_φ 、 Λ 与 Ω 所满足的方程, 即前面得到的 GS 方程, 并求出了在无穷远处的渐进解^[9]。这里, 他们使用的方法是在渐进无穷远的地方, $\Omega \rightarrow \Omega(\theta)$, $\Lambda \rightarrow \Lambda(\theta)$, 所以方程将大大简化, 令 $f = -\Lambda\Omega_{,\theta}$, 对 r^{-2} 进行幂级数展开, 并略去高阶项, 则有:

$$-\frac{1}{2f(\theta)} \frac{dH_\varphi^2}{d\theta} = -\Omega \sin \theta \frac{d}{d\theta} (f\Omega \sin \theta) + \frac{\sin \theta}{r^2} \left[-a^2 \Omega \sin^2 \theta \frac{d}{d\theta} (f\Omega \sin \theta) + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{f}{\sin \theta} \right) \right]. \quad (34)$$

取三阶项为零^[9], 从而得到 f 的表达式, 并通过一系列的计算, 加上在黑洞视界处的边界条件, 可以得到有物理意义的渐进解, 相关物理量均可以计算出来, 其中 Ω 与 f 为:

$$\Omega = \frac{a}{2Mr_+ + \rho_+^2}, \quad (35)$$

$$f = \frac{C_1 \sin \theta}{\sqrt{|(a\Omega \sin^2 \theta)^2 - 1|}}. \quad (36)$$

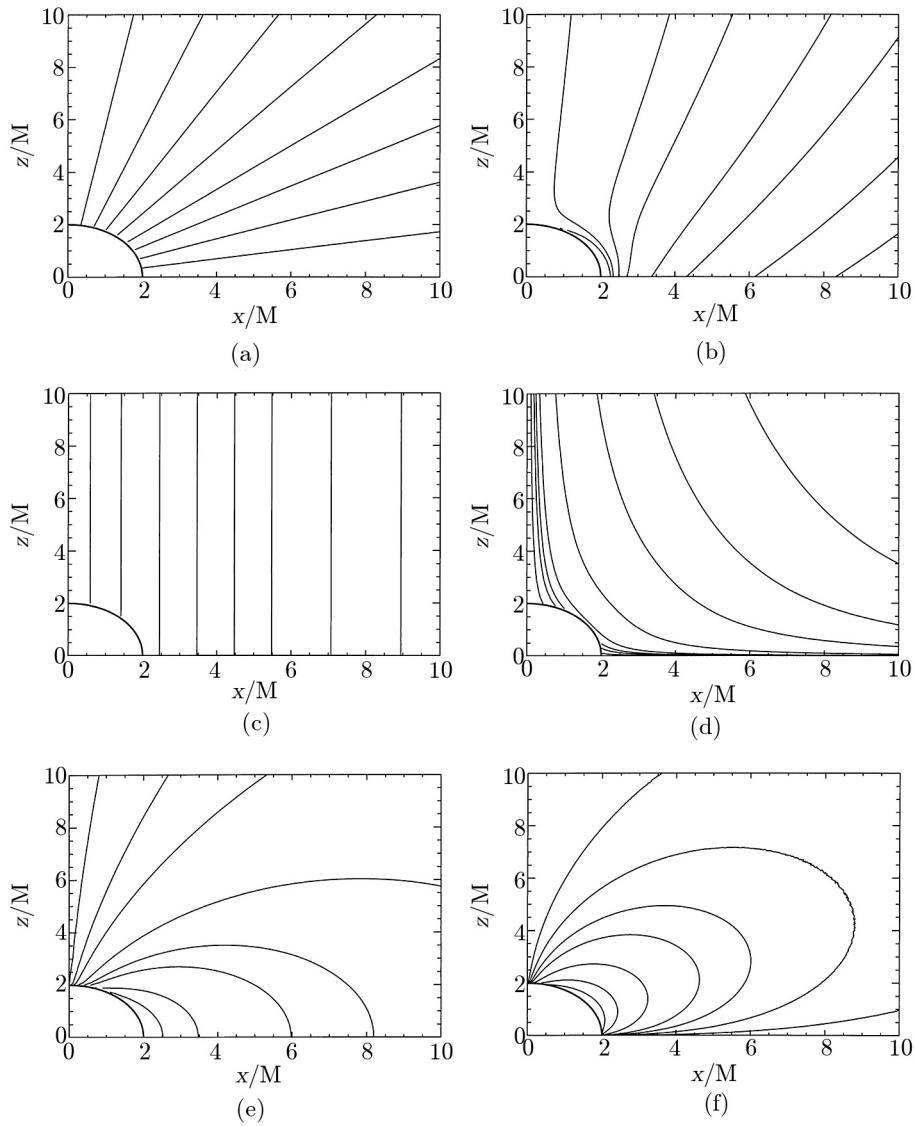


图6 (a)为单极场的位形；(b)为抛物型磁场的位形；(c)为纵向均匀磁场的位形；(d)为 $m = 2$ 的内部解；(e)为偶极场位形；(f)为四极场位形^[58]

则非零的电磁场量部分为：

$$B^r = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{B_0 \sin \theta}{2\rho_+} \frac{\sqrt{a\Omega_H}}{\Omega_+}, \quad E_\theta = -\sqrt{\gamma}\Omega_+ B^r, \\ \alpha B_\varphi = H_\varphi = -\sqrt{\gamma}\Omega_+ B^r \sin \theta, \quad (37)$$

其中，黑洞视界的旋转角速度为 $\Omega_H = a/2Mr_+$ 。当旋转参数很小时，这个解将回到单极解，因此，这个解可以看作是单极解的推广。

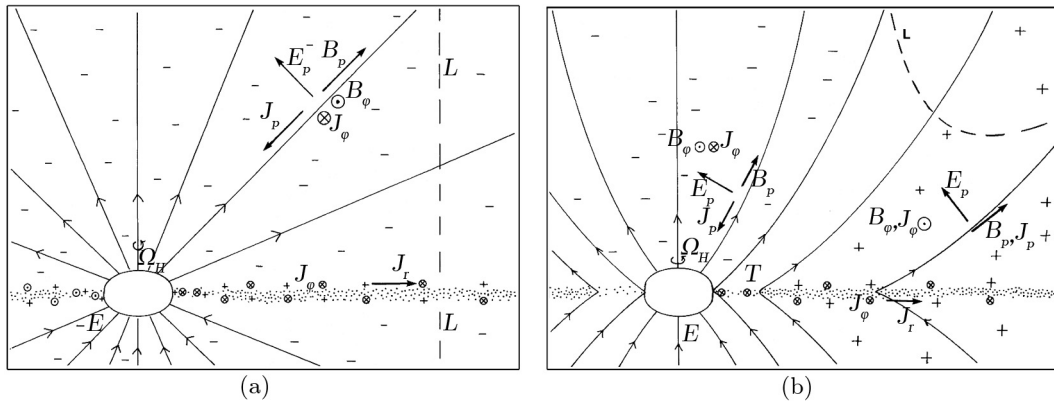


图 7 (a) 为单极场微扰解的位形; (b) 为抛物型磁场微扰解的位形^[3]

将这些非零的电磁场量代入到单位面积的能量流与角动量流的表达式中, 当 $r \gg r_+$ 时, 则有:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{dAdt} \approx \frac{a\Omega_H}{r^2} \left(\frac{B_0}{2} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{\rho_+^2}, \quad (38)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{2\pi}{3} B_0^2 \Omega_H + \frac{1}{\Omega_H} \frac{d\mathcal{E}}{dt}. \quad (39)$$

从上面的结果可以看到, 在轴向附近提取能量接近于零, 在赤道面附近最大。这与直观的图像是一致的, 磁场主要连接在黑洞和吸积盘上, 当黑洞转动角速度大于吸积盘的角速度时, 黑洞将能量转移到吸积盘上; 反之, 则将吸积盘的能量转移到黑洞上, 在吸积盘赤道面附近, 能量转移最大。

3.4 特殊情形下黑洞的磁层解

除了上面介绍的几种情况之外, 人们还对一些特殊情形下的磁层解做了研究。比如在黑洞旋转轴附近的近似磁层解^[24], 慢转动的克尔黑洞附近有吸积盘的磁层解^[59], 当电流满足类光条件时的磁层解^[12], 极端克尔黑洞视界附近的磁层解^[13, 14], 等等。

4 最新的进展与一些想法

最近几年在求解磁层解的研究方面, 主要的进展有如下几个工作: 2013 年 Brennan 等人在类光条件下得到了一大类解^[12], 然而这种解离真实的物理过程还有一定的距离, 它的用处是数值模拟; Li 等人发展了近视界度规下的黑洞磁层理论^[60], 并求出了在旋转轴附近的一个近似解; 2014 年 Lupsasca 等人利用 Kerr/CFT 对应得到了极端克尔黑洞视界附近的某些解^[13, 14], 这个工作首次将黑洞磁层与共形场论联系起来, 具有很重要的意义。

从 Menon 与 Dermer 得到渐进解的过程中可以看到, Komissarov 所发展的黑洞无力磁层理论具有一定的优越性, 对于求解 GS 方程也容易处理一些, 由此可以得到一些想法。首

先, 他们的渐进解是在远离黑洞的时候求得的, 此时 Ω 只是 θ 的函数, 类似地, 我们可以研究在某一角度附近做展开, 此时, $\Omega \rightarrow \Omega(r)$, 按照能流与角动量流的表达式, 此时将不会从黑洞提取任何能流, 但是, 我们可以借此进一步了解黑洞磁层的结构。其次, 在从黑洞提取旋转能量机制的研究中, 许多事实揭示了这样一种可能性, 即提取能量将会以最有效的方式, 也就是说, 能流随时间的变化率达到极大值, 如果以这个为简化条件, 也许能找到有用的解; 根据这种想法, 我们已经做了一些尝试, 不过还没有得到实质性的结果。另外就是将 Menon 与 Dermer 的解推广, 以便能了解在某个角度附近的磁层解, 这些工作都还在进行中。

5 问题的讨论与展望

从上文可以知道, GS 方程非常复杂。由于 Menon 与 Dermer 利用式 (30) 找到了渐进解, 以这种形式的 GS 方程为基础去寻找黑洞磁层的解是有希望的。在实际物理环境中, 这三个未知函数应该满足某些条件, 进而简化方程, 但是如何寻找这些条件是一个很麻烦的问题。到目前为止, 全局时空的黑洞无力磁层解还没有找到, 而利用数值模拟方法能对此问题做一定的研究, 但是, 却不能完全了解黑洞磁层的性质与结构, 因而天文学家依然对黑洞附近的物理过程知之甚少, 人们迫切地需要得到有物理意义的解。

参考文献:

- [1] Penrose R. *Nuovo Cimento Rivista Serie*, 1969, 1: 252
- [2] Goldreich P, Julian W H. *ApJ*, 1969, 157: 869
- [3] Blandford R D, Znajek R L. *MNRAS*, 1977, 179: 433
- [4] Znajek R L. *MNRAS*, 1978, 185: 833
- [5] Thorne K S, MacDonald D. *MNRAS*, 1982, 198: 339
- [6] MacDonald D, Thorne K S. *MNRAS*, 1982, 198: 345
- [7] Price R H, Thorne K S. *Phys. Rev. D*, 1986, 33: 915
- [8] Thorne K S, Price R H, MacDonald D A. *Black holes: The membrane paradigm*. London: Yale University Press, 1986: 1
- [9] Menon G, Dermer C D. *ApJ*, 2005, 635: 1197
- [10] Pan Z, Yu C. *ArXiv e-prints*, 2014
- [11] Komissarov S S. *MNRAS*, 2004, 350: 427
- [12] Brennan T D, Gralla S E, Jacobson T. *Classical and Quantum Gravity*, 2013, 30(19): 195012
- [13] Lupsasca A, Rodriguez M J, Strominger A. *Journal of High Energy Physics*, 2014, 12: 185
- [14] Lupsasca A, Rodriguez M J. <http://ads.bao.ac.cn/abs/2014arXiv1412.4124L>, 2014
- [15] Komissarov S S. *MNRAS*, 2001, 326: L41
- [16] Komissarov S S. *MNRAS*, 2004, 350: 1431
- [17] Uzdensky D A. *ApJ*, 2005, 620: 889
- [18] Contopoulos I, Kazanas D, Papadopoulos D B. *ApJ*, 2013, 765: 113
- [19] Nathanail A, Contopoulos I. *ApJ*, 2014, 788: 186
- [20] Landau L D, Lifshitz E M. *The classical theory of fields*. Oxford: Pergamon Press, 1971: 278

- [21] Frolov V P, Novikov I D. *Black hole physics : basic concepts and new developments*. Copenhagen: Kluwer Academic, 1998: 298
- [22] Punsly B, ed. *Astrophysics and Space Science Library*, 2008, 355: 154
- [23] 雷卫华. 博士论文. 武汉: 华中科技大学, 2006: 15
- [24] Beskin V S. *MHD Flows in Compact Astrophysical Objects*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010: 204
- [25] Wagh S M, Dadhich N. *Phys. Rep.*, 1989, 183: 137
- [26] Takahashi M, Nitta S, Tatematsu Y, et al. *ApJ*, 1990, 363: 206
- [27] Koide S. *Phys. Rev. D*, 2003, 67(10): 104010
- [28] Komissarov S S. *MNRAS*, 2005, 359: 801
- [29] Hirofani K, Takahashi M, Nitta S, et al. In: Tanaka Y, Koyama K, eds. *Frontiers Science Series*. US: NASA, 1992: 611
- [30] Koide S, Shibata K, Kudoh T, et al. *Science*, 2002, 295: 1688
- [31] Koide S. *General Relativity and Gravitation (JGRG19)*. <http://ads.bao.ac.cn/abs/2009grg..confO..28K>, 2009: 28
- [32] Press W H, Teukolsky S A. *Nature*, 1972, 238: 211
- [33] Teukolsky S A, Press W H. *ApJ*, 1974, 193: 443
- [34] Lightman A P, Shapiro S L. *ApJ*, 1975, 198: L73
- [35] Lightman A P, Press W H, Price R H, et al. *Problem book in relativity and gravitation*. Princeton: Princeton University Press, 1975
- [36] Koide S, Baba T. *ApJ*, 2014, 792: 88
- [37] Tchekhovskoy A, Narayan R, McKinney J C. *MNRAS*, 2011, 418: L79
- [38] Blandford R D. *Astrophysical Discs - an EC Summer School*. *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 1999, 160: 265
- [39] van Putten M H P M. *Science*, 1999, 284: 115
- [40] Li L X. *Phys. Rev. D*, 2002, 65(8): 084047
- [41] Wang D X, Xiao K, Lei W H. *MNRAS*, 2002, 335: 655
- [42] Wang D X, Lei W H, Ma R Y. *MNRAS*, 2003, 342: 851
- [43] Ghosh P, Abramowicz M A. *MNRAS*, 1997, 292: 887
- [44] Li L X. *ApJ*, 2000, 531: L111
- [45] Gruzinov A. *ArXiv Astrophysics e-prints*, 1999
- [46] Zamaninasab M, Clausen-Brown E, Savolainen T, et al. *Nature*, 2014, 510: 126
- [47] Wilms J, Reynolds C S, Begelman M C, et al. *MNRAS*, 2001, 328: L27
- [48] Beskin V S. *Soviet Physics Uspekhi*, 1997, 40: 659
- [49] Beskin V S. *Physics Uspekhi*, 1997, 40: 659
- [50] Appl S, Camenzind M. *A&A*, 1993, 274: 699
- [51] Appl S, Camenzind M. *A&A*, 1993, 270: 71
- [52] Fendt C. *A&A*, 1997, 319: 1025
- [53] Wald R M. *Phys. Rev. D*, 1974, 10: 1680
- [54] Hanni R S, Ruffini R. *Nuovo Cimento Lettere*, 1976, 15: 189
- [55] MacDonald D A. *Black-hole electrodynamics*. Pasadena: California Institute of Technology, 1984
- [56] Blandford R D. *MNRAS*, 1976, 176: 465
- [57] Blandford R D, McKee C F. *Bulletin of the American Astronomical Society*, 1976, 8: 78
- [58] Ghosh P. *MNRAS*, 2000, 315: 89
- [59] Beskin V S, Istomin Y N, Pariev V I. In: Roland J, Sol H, Pelletier G, eds. *Extragalactic Radio Sources. From Beams to Jets*. 1992: 45
- [60] Li H, Yu C, Wang J, et al. <http://ads.bao.ac.cn/abs/2014arXiv1403.6959L>, 2014

New Advances in Magnetospheres Analytical Study of Black Hole

XU Zhao-yi, WANG Jian-cheng

(China Key Laboratory for the Structure and Evolution of Celestial Objects, Yunnan Observatories, Chinese Academy of Sciences, 650011 Kunming, China)

Abstract: Black hole steady state force-free magnetosphere theories play an important role in the high energy astrophysics study, such as the emission mechanism of relativistic jets in active galactic nuclei, Gamma-ray bursts and ultra-luminous X-ray binaries etc. In order to know the steady state force-free magnetospheres property, One needs to find the solution to the Grad-Shafranov equation(GS). Therefore, finding the analytic solutions of black hole steady state force-free magnetospheres is important for understanding these astrophysical phenomena. In this paper, we give a detailed review on this topic including the histories, recent progresses and future prospects.

We first present the black hole electrodynamics and black hole force-free magnetosphere. We introduce the electromagnetic extraction of energy from Kerr black hole: Blandford-Znajek mechanism. We also introduce the black hole force-free magnetosphere in the aspect of application to active galactic nuclei relativistic jets and accretion disk. Next, we outline progress in solving the black hole steady state force-free magnetosphere equations in the past decades, including the solutions of Schwarzschild black hole, the perturbation solutions of low speed rotating black hole, and the asymptotic solutions, with an emphasis on the asymptotic solutions. These solutions are important to study the black hole magnetosphere. We discuss the inspiration of these work on searching analytic solution. The main problem and challenges in solving the GS equation are also introduced. Finally we discuss the future of solving the GS equation.

Key words: Kerr black hole; force-free magnetosphere; GS equation; analytical solution